

代数的な商集合 (by 山田)

1 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ (n は自然数)

$$\begin{aligned}\mathbf{Z} &= \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\} \\ n\mathbf{Z} &= \{nx \mid x \in \mathbf{Z}\} \quad (n \text{ の倍数の集合}) \\ &= \{0, \pm n, \pm 2n, \pm 3n, \dots\}\end{aligned}$$

$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ は $\mathbf{Z}$ の 次の同値関係 $\equiv$ による商集合.

$$x \equiv x' \iff x - x' \in n\mathbf{Z}$$

ただし n を強調したいときは, $x \equiv x' \pmod{n}$ のように表わす.

$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ は n 個の元からなる. 通常 代表元として $\{[0], [1], [2], \dots, [n-1]\}$ を用いる. カッコ $[]$ は省略されることも多い.

定義: 商集合 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ の上での 和 $(+)$ と積 $(\times, \cdot)$

$$[x] + [y] := [x + y], \quad [x] \cdot [y] := [x \cdot y].$$

つまり “代表元で計算した計算結果の属す類を計算結果” とする.

定理: 商集合 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ の上で 和 $(+)$ と積 $(\times, \cdot)$ は well-defined. つまり,

$$\begin{aligned}x \equiv x' \text{ かつ } y \equiv y' \text{ ならば } x + y \equiv x' + y' \quad &\text{in } \mathbf{Z}, \text{ あるいは} \\ [x] = [x'] \text{ かつ } [y] = [y'] \text{ ならば } [x + y] = [x' + y'] \quad &\text{in } \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}.\end{aligned}$$

積についても同様.

2 ベクトル商空間

V を線形空間, W をその部分空間とする.

V の W による商空間 V/W とは, V の 次の同値関係 $\sim$ による商集合のこと.

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{v}' \iff \mathbf{v} - \mathbf{v}' \in W$$

定義: 商集合 V/W の上での 和 $(+)$ とスカラー倍

$$[\mathbf{v}_1] + [\mathbf{v}_2] := [\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2], \quad c[\mathbf{v}] := [c\mathbf{v}].$$

つまり “代表元で計算した計算結果の属す類を計算結果” とする.

定理: 商集合 V/W の上で 和 $(+)$ とスカラー倍は well-defined. つまり,

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \sim \mathbf{v}' \text{ かつ } \mathbf{w} \sim \mathbf{w}' \text{ ならば } \mathbf{v} + \mathbf{w} \sim \mathbf{v}' + \mathbf{w}' \quad &\text{in } V, \text{ あるいは} \\ [\mathbf{v}] = [\mathbf{v}'] \text{ かつ } [\mathbf{w}] = [\mathbf{w}'] \text{ ならば } [\mathbf{v} + \mathbf{w}] = [\mathbf{v}' + \mathbf{w}'] \quad &\text{in } V/W.\end{aligned}$$

スカラー倍についても同様.

このことは 商集合 V/W が線形空間であることを示している.

次元は (V と W が有限次元であれば) $\dim(V/W) = \dim V - \dim W$ となる. これには 線形代数学第2 で学んだ 次の補題を思い出すと良い.

補題: n 次元の線形空間 V 内で r ($< n$) 個のベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$ が 1 次独立であるとき, $(n-r)$ 個のベクトル $\mathbf{v}_{r+1}, \mathbf{v}_{r+2}, \dots, \mathbf{v}_n$ が存在して

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \mathbf{v}_{r+2}, \dots, \mathbf{v}_n$$

は V の基底となる.

(ポイントは, $\mathbf{u}_*$ 達のどれも取り除かないで, 新しいベクトルを加えるだけで基底が構成できることにある.)

この定理の設定で $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$ の生成する部分空間が W であるとき, $[\mathbf{v}_{r+1}], [\mathbf{v}_{r+2}], \dots, [\mathbf{v}_n]$ が V/W の基底となる.

例: $V :=$ “ xyz -空間”, $W :=$ “ xy -平面” として $V/W =$ “ z -軸”.

例: $V :=$ “ xyz -空間”, $W :=$ “ x -軸” として $V/W =$ “ yz -平面”.

例: $V := \mathbf{R}^2$, $W := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ とすると

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \quad \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad \text{in } V/W$$

V/W の基底は, $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ でも良いし, $\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right]$ でもいい. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と 1 次独立なベクトルのなす類であれば 何でも良い.

例: $V :=$ “ x の実数係数多項式の集合”,

$$W := \{p(x) \in V \mid p(0) = p'(0) = p''(0) = 0\} \quad (x^3 \text{ で割り切れる多項式の集合})$$

の場合, V, W はどちらも無限次元であるが, V/W は 3 次元で $[1], [x], [x^2]$ が基底となる.

3 T^2 (トーラス)

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ を $\mathbf{R}^2$ の 1 次独立なベクトルとする. また $\mathbf{R}^2$ 内で,

$$\mathbf{Z}\mathbf{a}_1 + \mathbf{Z}\mathbf{a}_2 := \{n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbf{Z}\}.$$

T^2 を $\mathbf{R}^2$ の 次の同値関係 $\sim$ による商集合とする.

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{v}' \iff \mathbf{v} - \mathbf{v}' \in \mathbf{Z}\mathbf{a}_1 + \mathbf{Z}\mathbf{a}_2$$

この商集合は, 幾何として トーラス と同相である. $\mathbf{R}^2$ 内で次の部分 (基本領域) を展開図と考えると良い.

$$[0, 1]\mathbf{a}_1 + [0, 1]\mathbf{a}_2 := \{x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 \mid x_1, x_2 \in [0, 1]\}.$$