２００９年１０月１８日　Casson-Freedman 理論研究会

Freedman 原論文に学ぶ　６章・８章　その**3**

山田 裕一　　（電気通信大学）

・６章：

The decomposition space CH/gaps+
intermediate between CH and H

・８章：

The approximation of $\alpha : H \to \mathrm{CH}/\{\mathrm{gap}+\}$

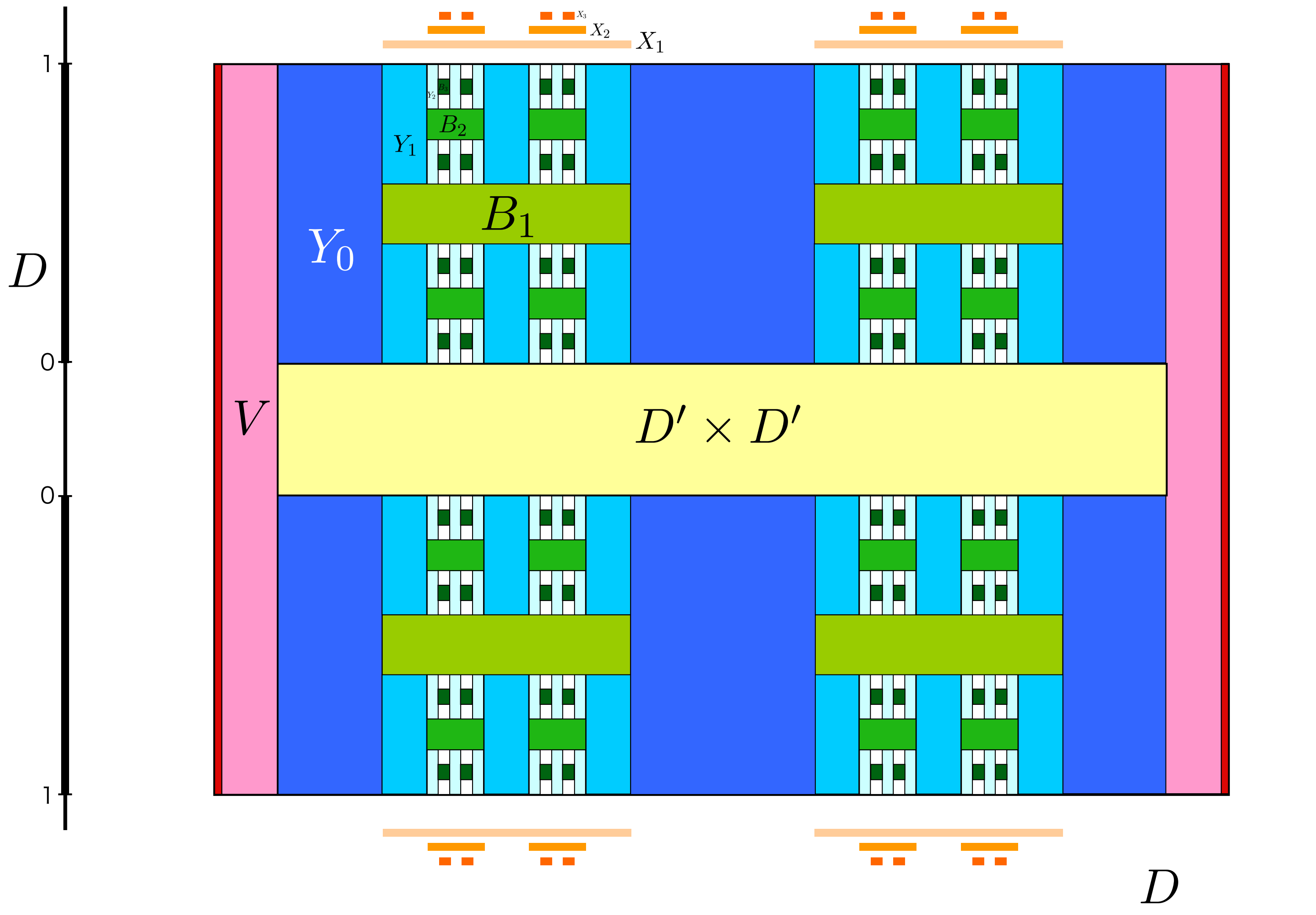
８章の内容

$\alpha : \overset{\circ}{H} \to \overset{\circ}{H}/\{\mathrm{hole}^+\} = \mathrm{CH}/\{\mathrm{gap}^+\}$ はたくさんの閉集合をつぶす写像.　３段階にわける.

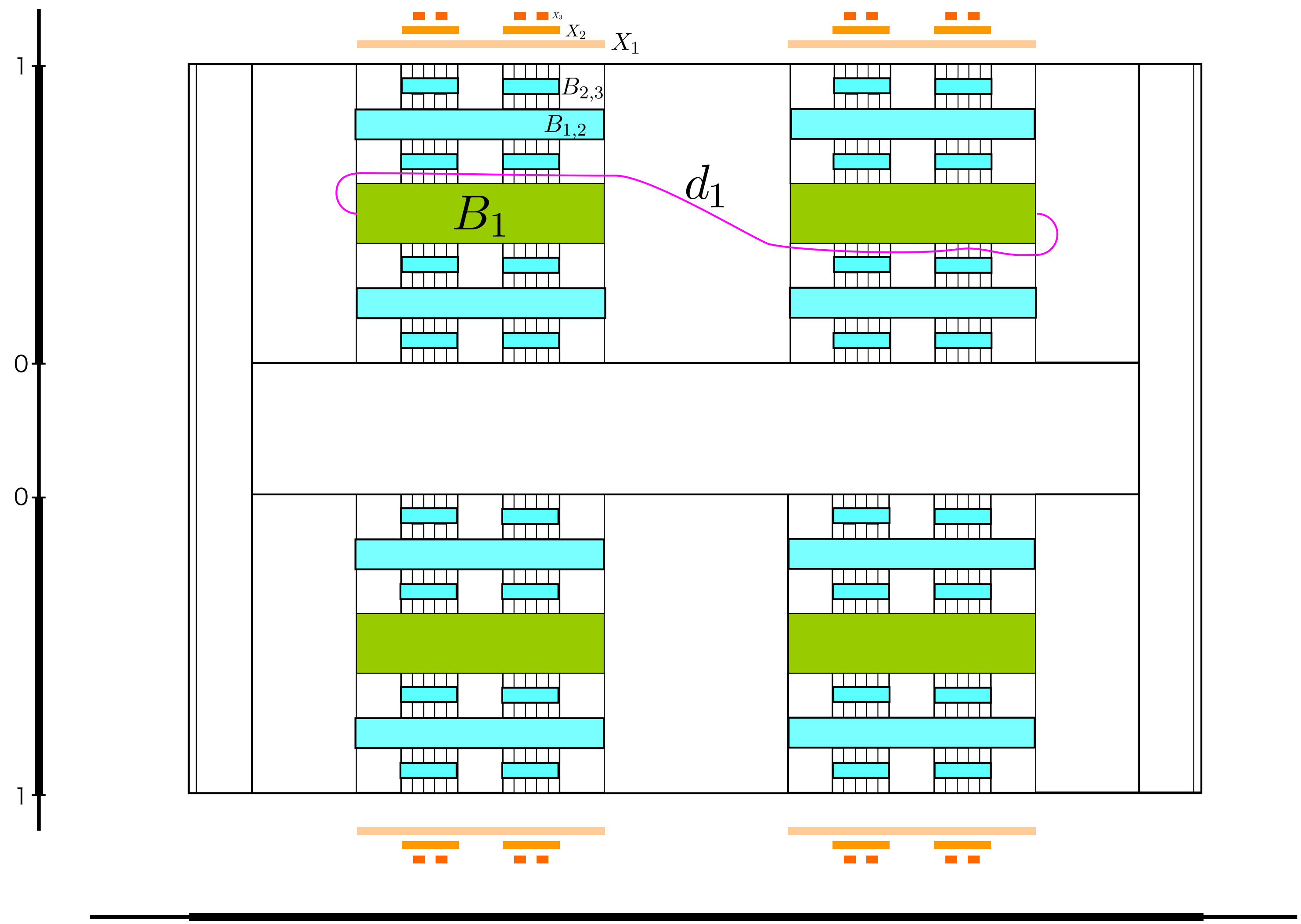
[1] まず $\alpha_1 : \overline{\overline{Wh}}$ をつぶす.
[2] 続いて $\alpha_2 : B_k^j \cup d_k^j$ をつぶす.
[3] 最後に $\alpha_3 : D' \times D'$ をつぶす.

つぶす写像は同相写像ではない. 同相写像に近似できる写像(ABH)であること, つまり BSC を示す. ８章の焦点は [2].

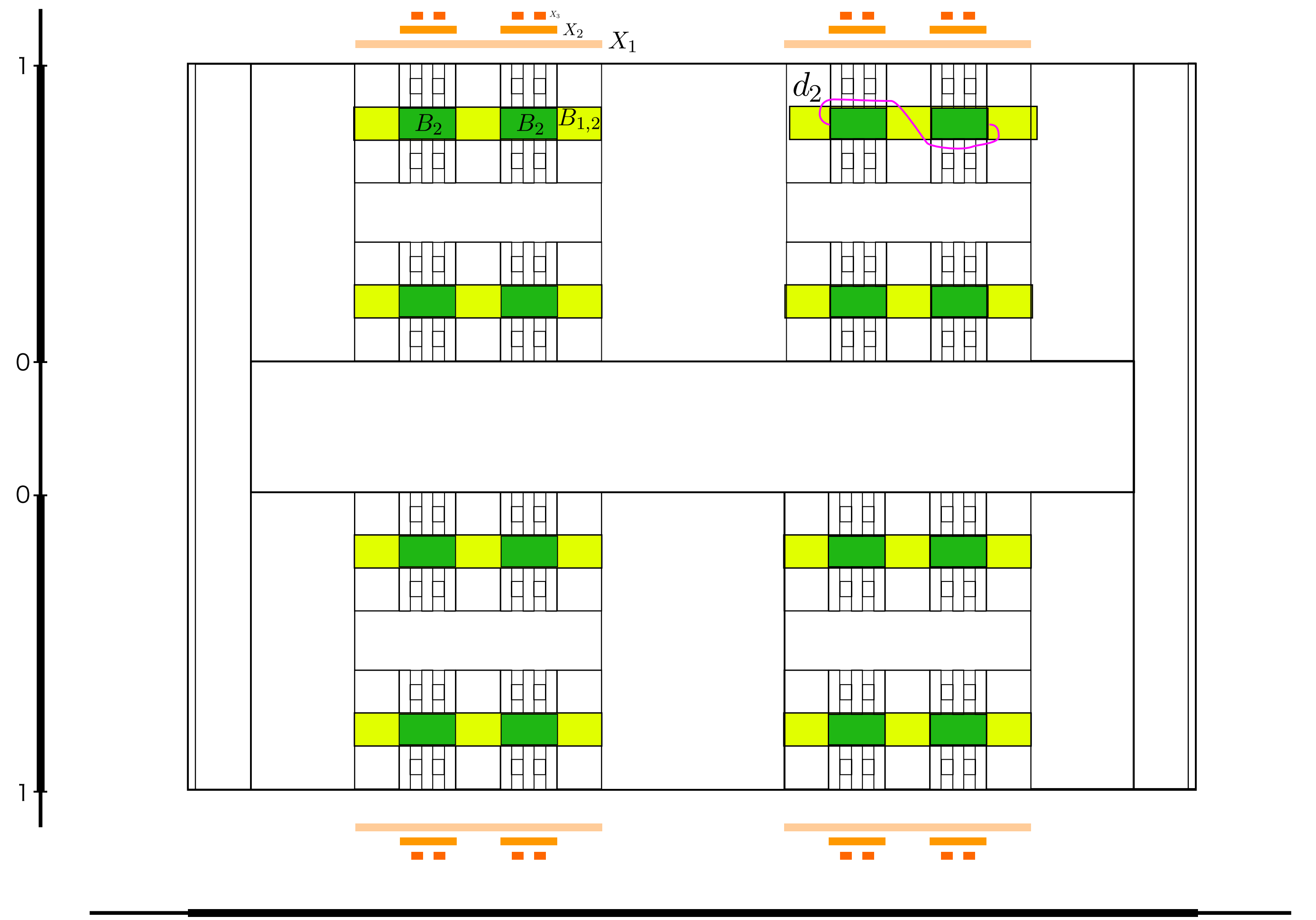
[3] の証明は １章 (p.362) にある.



Design（設計図）$\mathfrak{D}$ "in" $H = D^2 \times D^2$

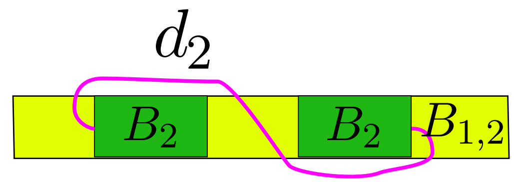


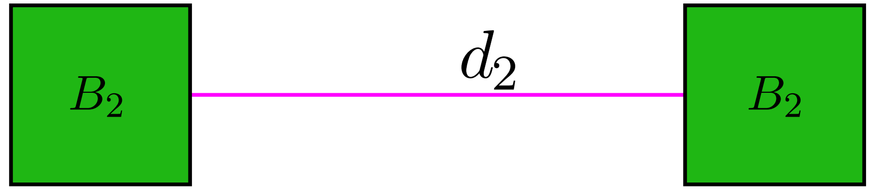
The disk d_k^j must to be disjoint from $\bigcup_{l=k}^{\infty} B_{l,l+1}$



Solid tori $B_2 \subset$ solid tori $B_{1,2}$, *null-homotopic* like $X_2 \subset X_1$.

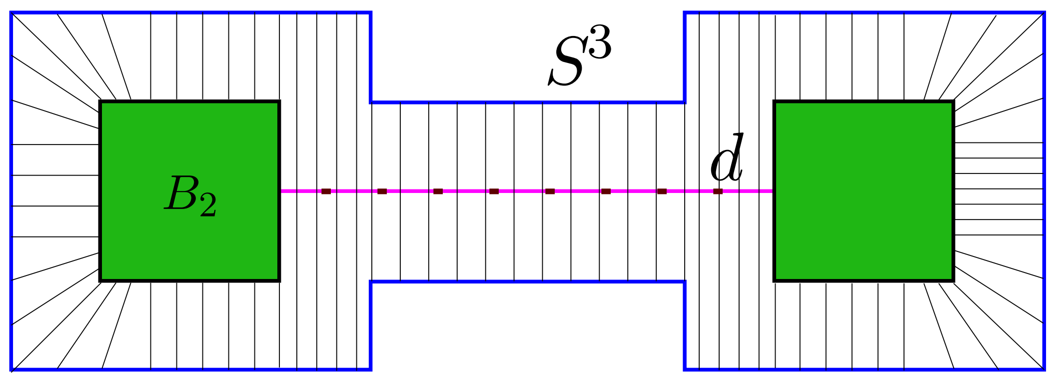
α_2 は $B_k^j \cup d_k^j$ をつぶす写像.
B_k^j は solid torus $\times [. **1, . **2]$ 型で
d はその ホモロジーを消す円板.





このように配置して考える. (Diagram8.3 p.429)
つぶす部分の近傍に Star-like structure（７章）を構成してみせる.

Freedman の得意技：Map cylinder 構造 $M(S^3 \to d)$

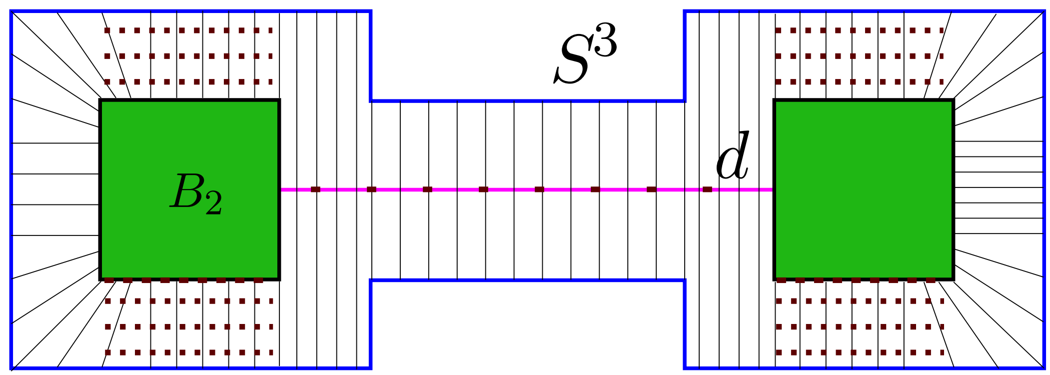


d には α_1（$\overline{\overline{Wh}}$をつぶす）でつぶされた点があるかも知れない.

６章「各 d は $\overline{\overline{Wh}}$ の各成分とは高々１点でしか交わらない」

６章の構成から d の locally flat 性は保たれる.

思い出そう.「こげ茶 $\overline{\overline{Wh}}$ は みどり の近くにたくさんある.」



７章 最後の Addendum (Andrews-Rubin の各種の拡張版) を使う.

$$(\text{Solid Torus}/Wh) \times \mathbf{R} \approx (\text{Solid Torus}) \times \mathbf{R}$$

７章最後の Addendum：Andrews–Rubin の定理の拡張

$\mathrm{ST} = \text{Solid Torus}$ として

$$\begin{aligned}(\mathrm{ST}\times\mathbf{R})\big/\{Wh\times\{r\}\,|r\in\mathbf{R}\} &= (\mathrm{ST}\big/Wh)\times\mathbf{R}\\ &\approx \mathrm{ST}\times\mathbf{R}\\ (\mathrm{ST}\times\mathbf{R})\big/(Wh\times\{0\}) &\approx \mathrm{ST}\times\mathbf{R}\\ (\mathrm{ST}\times(0,1))\big/\{Wh\times\{r\}\,|r\in\mathrm{CS}\} &\approx \mathrm{ST}\times(0,1)\end{aligned}$$

さらに，その generalized Wh への一般化.

８章の最後に

Theorem 8. $\alpha : \mathring{H} \to \mathrm{CH}/\{\mathrm{gap}^+\}$ is ABH.

$$\forall\, \mathrm{CH}, \quad \exists\, \text{homeomorphism } \alpha : \mathring{H} \to \mathrm{CH}/\{\mathrm{gap}^+\}$$

の証明が 完成したかのように書いてある.
が，$\alpha = \alpha_3 \circ \alpha_2 \circ \alpha_1$ のうち最後の α_3 について（証明の仕上げ）は,
実は １章 (p.362) に書いてある.

α_3 は

$\mathring{H}$ 内の central gap $D' \times D'$ をつぶす写像.
CH 内の $G = K_0 - \mathrm{int}V$ に対応.
（K_0 は 最も内側にある $\mathrm{CH}_{0.00\ldots}$ のコンパクト化.）

ありがとうございました