２００９年１０月１８日　Casson-Freedman 理論研究会

# Freedman 原論文に学ぶ　６章・８章　$\boxed{\text{その}\mathbf{1}}$

山田 裕一　　（電気通信大学）

・６章：

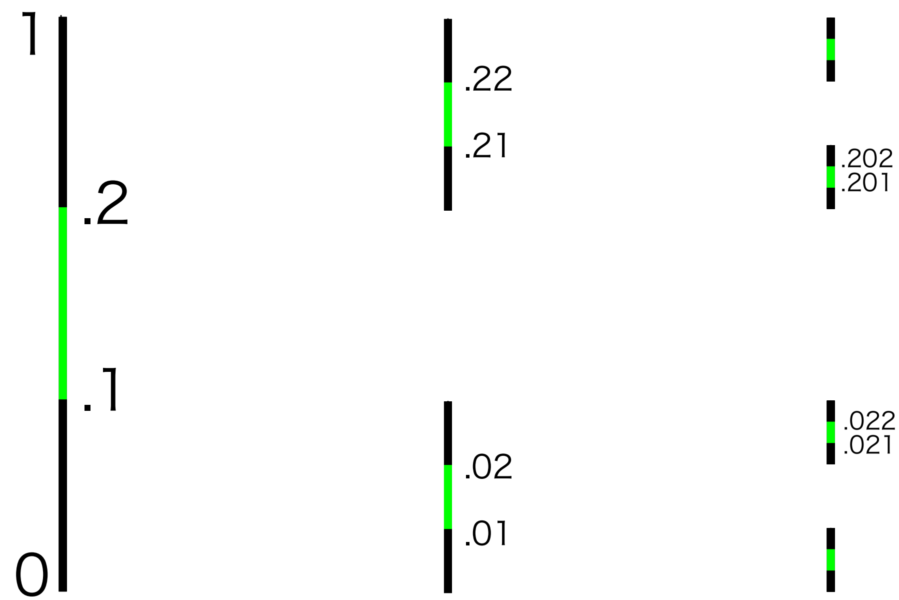
The decomposition space CH/gaps+
intermediate between CH and H

・８章：

The approximation of $\alpha : H \to \mathrm{CH}/\{\mathrm{gap+}\}$

- $\mathrm{CS} = \{\, 0.c_1c_2c_3\cdots \in [0,1]$（３進法）$\mid$ 各 $c_i$ は $0$ か $2 \,\}$

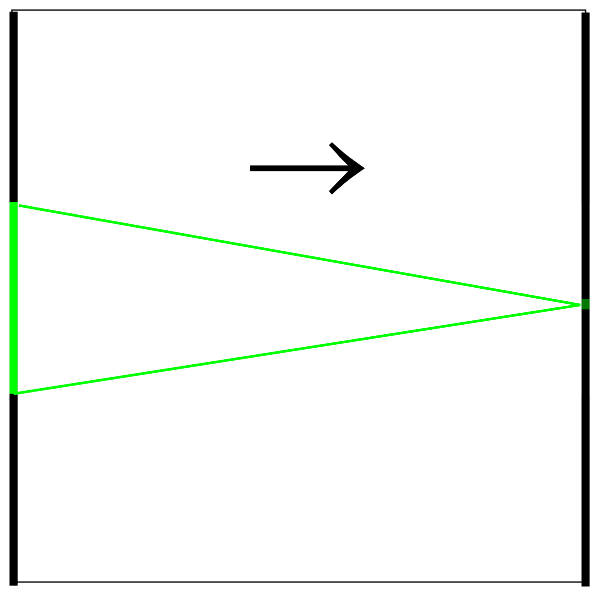
  $.01 = .00222\cdots \in \mathrm{CS}$ とみなす.

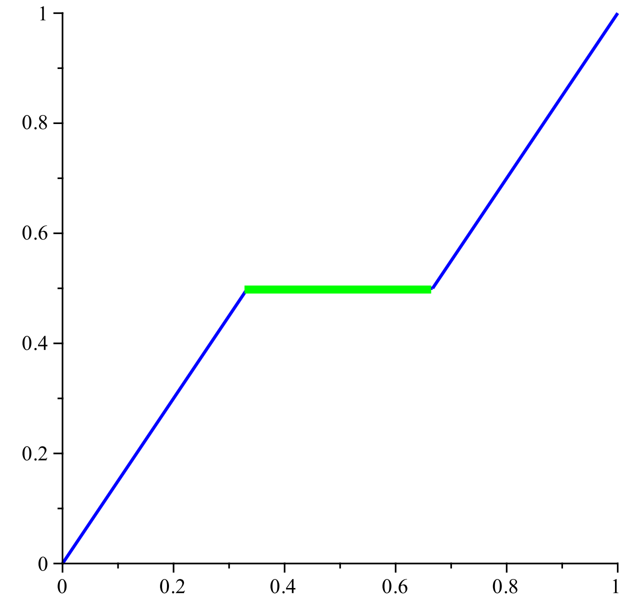



第１段階で取り除かれる middle third が開 $(1/3, 2/3) = (.1, .2)$

緑は除く色!　除くときは<u>開</u>集合. つぶすときは<u>閉</u>集合でつぶす.

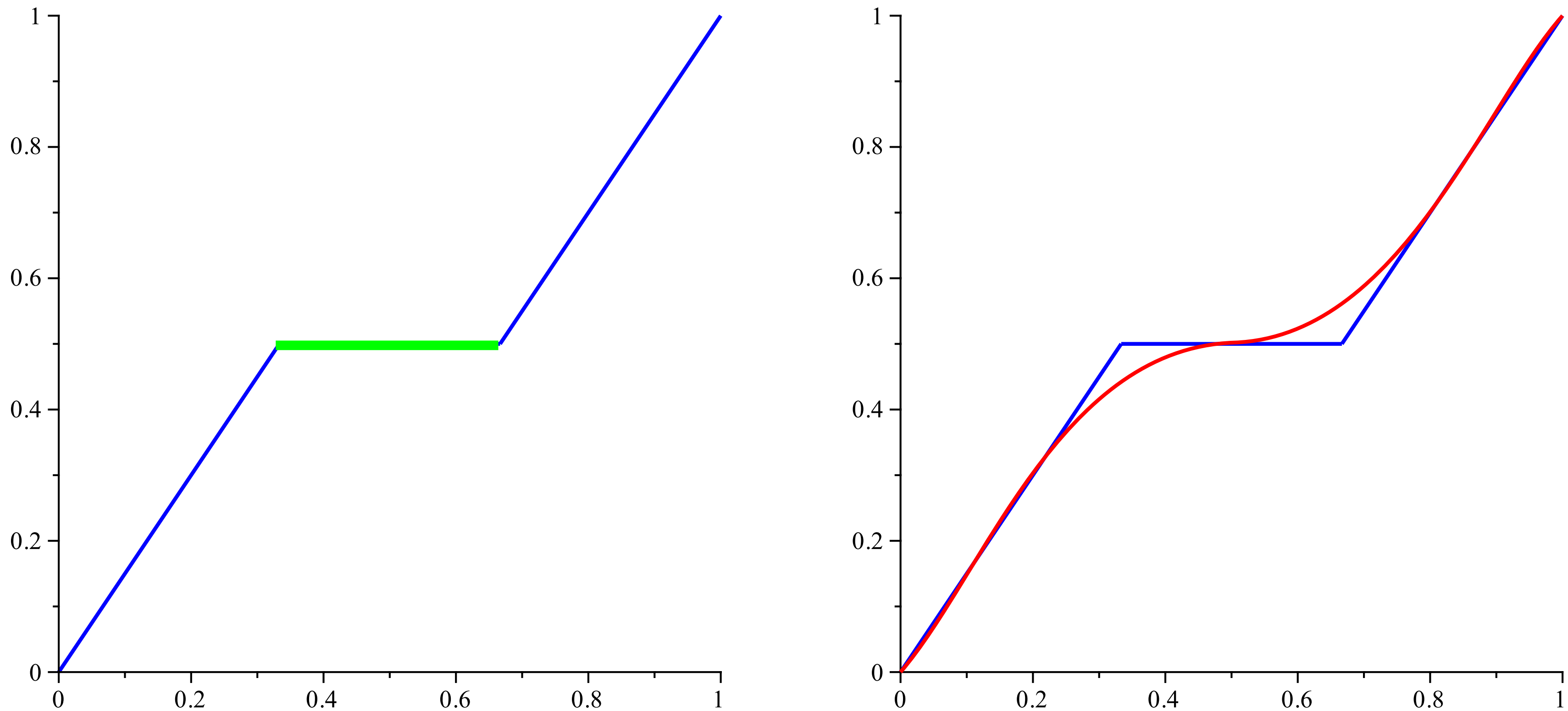
Cantor function へ





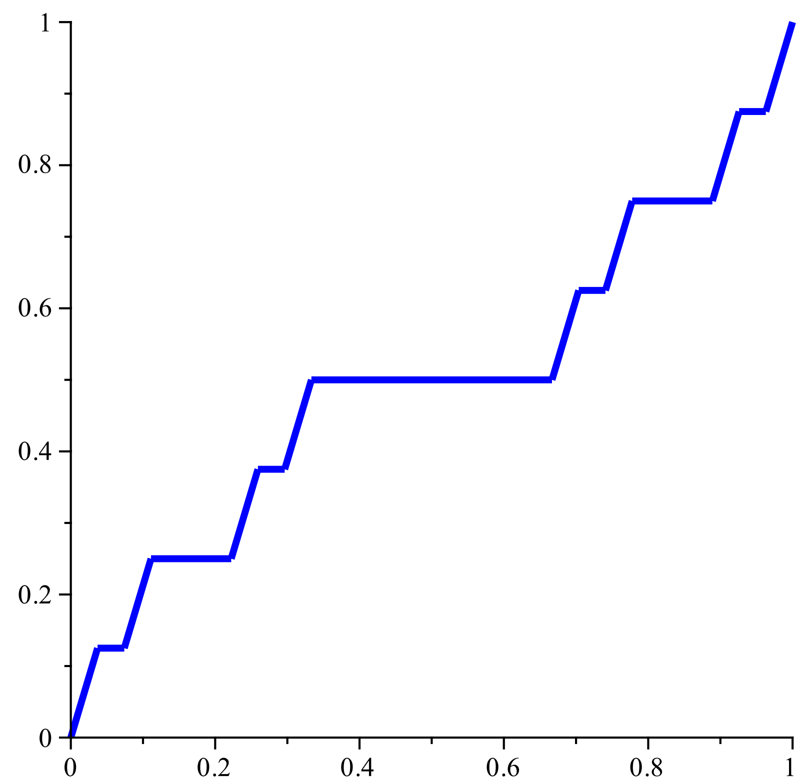

First step to define Cantor set/function $F_n$

$$\overline{D}(F_1) = \{[1/3, 2/3]\} = \{[.1, .2]\}$$ 3進法で



$F_1$ is **A**pproximable **B**y **H**omeo

$$\overline{D}(F_2) = \{[1/3, 2/3],\ [1/9, 2/9], [7/9, 8/9]\}$$
$$= \{[.1, .2],\ [.01, .02], [.21, .22]\}$$




Cantor function ($F_3$)

Cantor 集合 CS

・CS $= \{\, 0.c_1c_2c_3\cdots \in [0,1]$（３進法）$|$ 各 $c_i$ は $0$ か $2\,\}$

・CS は *perfect* （全ての点が集積点）(p.408)

$$\forall x \in A, \quad x \in \overline{A - \{x\}}$$

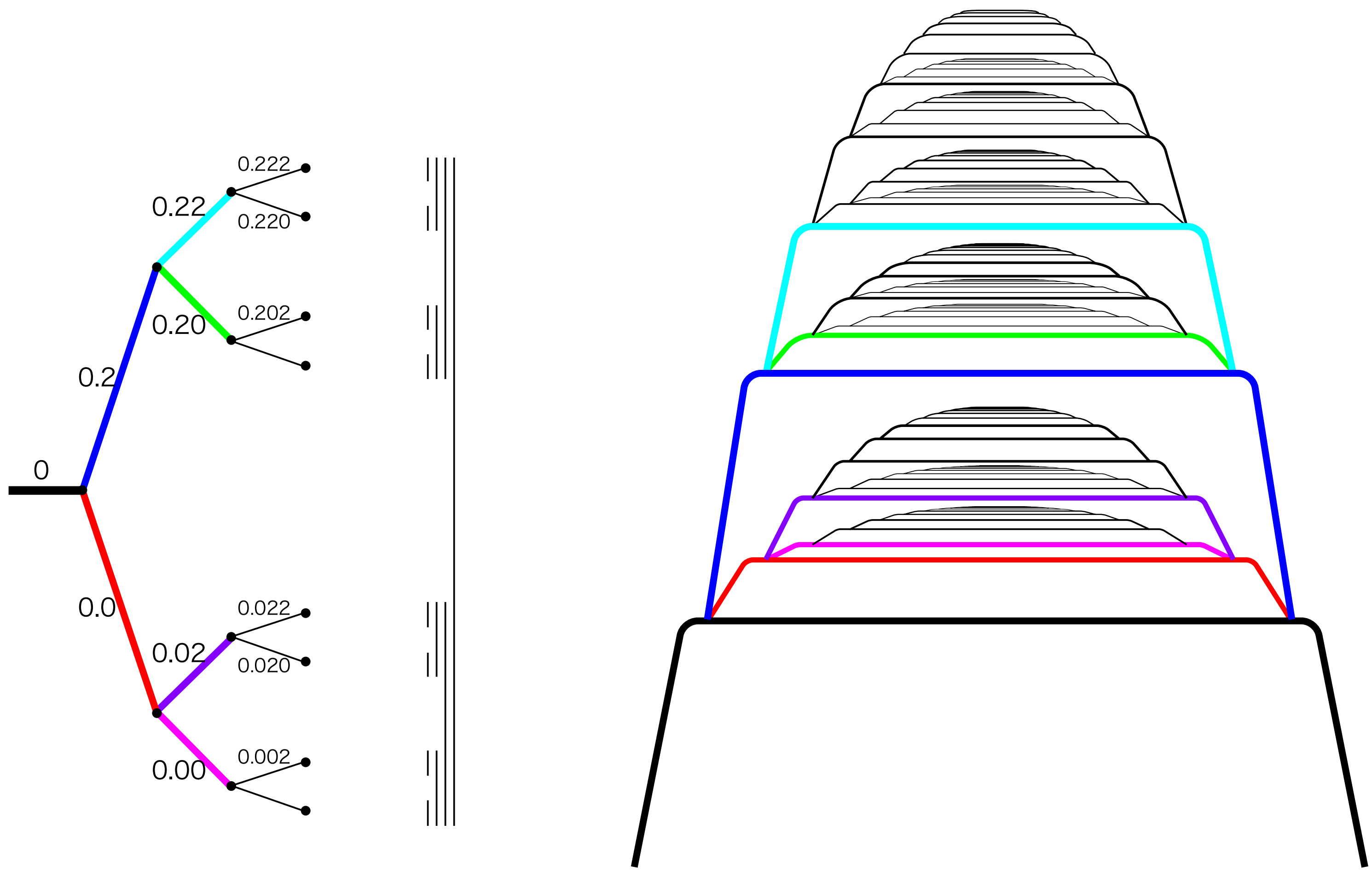
・CS$^-$ is “CS with end points deleted” (p.408)

「何回目かの stage で残った部分 (left piece) の端点」

$.c_1c_2\cdots c_n22222\cdots$ や $.c_1c_2\cdots c_n00000\cdots$

を除いたもの（$c_i$ は $0$ か $2$）

$x = .c_1c_2\cdots c_n22222\cdots \in$ CS は, 残ったときの上端なので上からの集積点にはならない.




Cantor set tree and reimbedded CHs

$\boxed{\text{考察}}$ 次の性質をもつ, CS に パラメトライズされたCH達 の包含列 $\{\mathrm{CH}_r\}_{r\in\mathrm{CS}}$ が 親CH 内に構成されている.

(1) 親CH $= \mathrm{CH}_{.2222\cdots}$

(2) $r < r' \in \mathrm{CS} \;\Rightarrow\; \mathrm{CH}_r \subset \mathrm{CH}_{r'}$
ただし $\mathrm{CH}_r$ 達の Attching part の core ($\cong S^1$) は共通.

(3) $r$ と $r'$ が小数点 $k$ 桁まで一致すれば, $k$ 世代までは一致.
— 正確には $\mathrm{CH}_r$ ではなく $K_r$（Shapiro-Bing compact 化）

$\boxed{\text{考察}}$ 次の性質をもつ, CS に パラメトライズされたCH達 の包含列 $\{\mathrm{CH}_r\}_{r\in\mathrm{CS}}$が 親CH 内に構成されている.

(1) 親CH $=\mathrm{CH}_{.2222\cdots}$

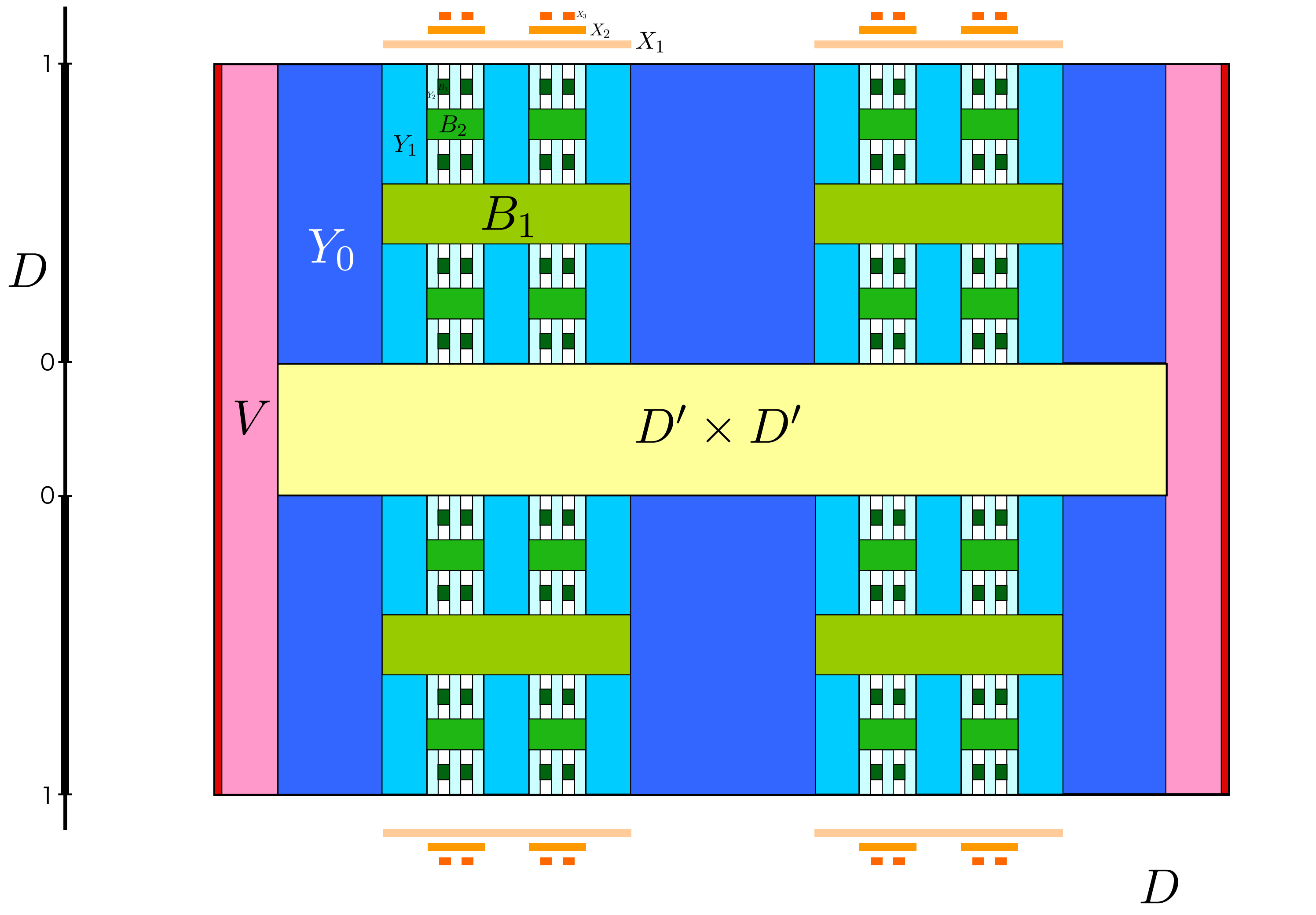
(2) $r<r'\in\mathrm{CS}\ \Rightarrow\ \mathrm{CH}_r\subset\mathrm{CH}_{r'}$
ただし $\mathrm{CH}_r$達の Attching part の core ($\cong S^1$) は共通.

(3) $r$と$r'$が小数点$k$桁まで一致すれば, $k$世代までは一致.
— 正確には $\mathrm{CH}_r$ ではなく $K_r$（Shapiro-Bing compact化）

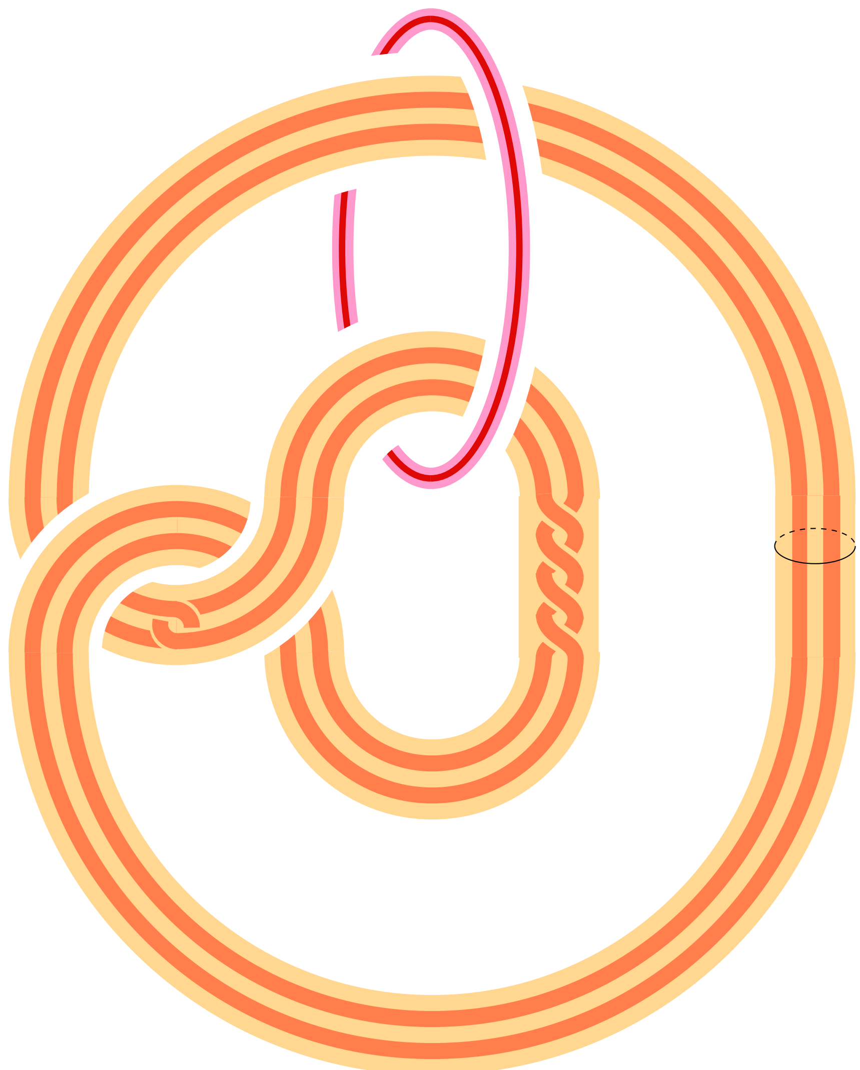
これ, 通常の 2-handle $H=D^2_1\times D^2_2$ でなら簡単.

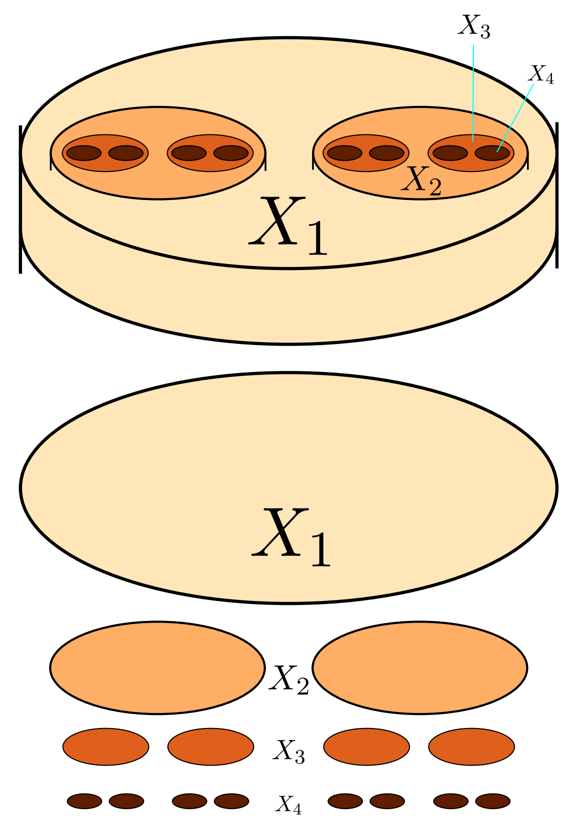
$$D^2_1\times D^2_2(r)$$

$D^2(r)$ は 半径$r$ ($r<1$) の円板
— そう思えば 写像$g:\mathrm{Design}\mathfrak{D}\to\mathrm{CH}$ が不自然ではない —



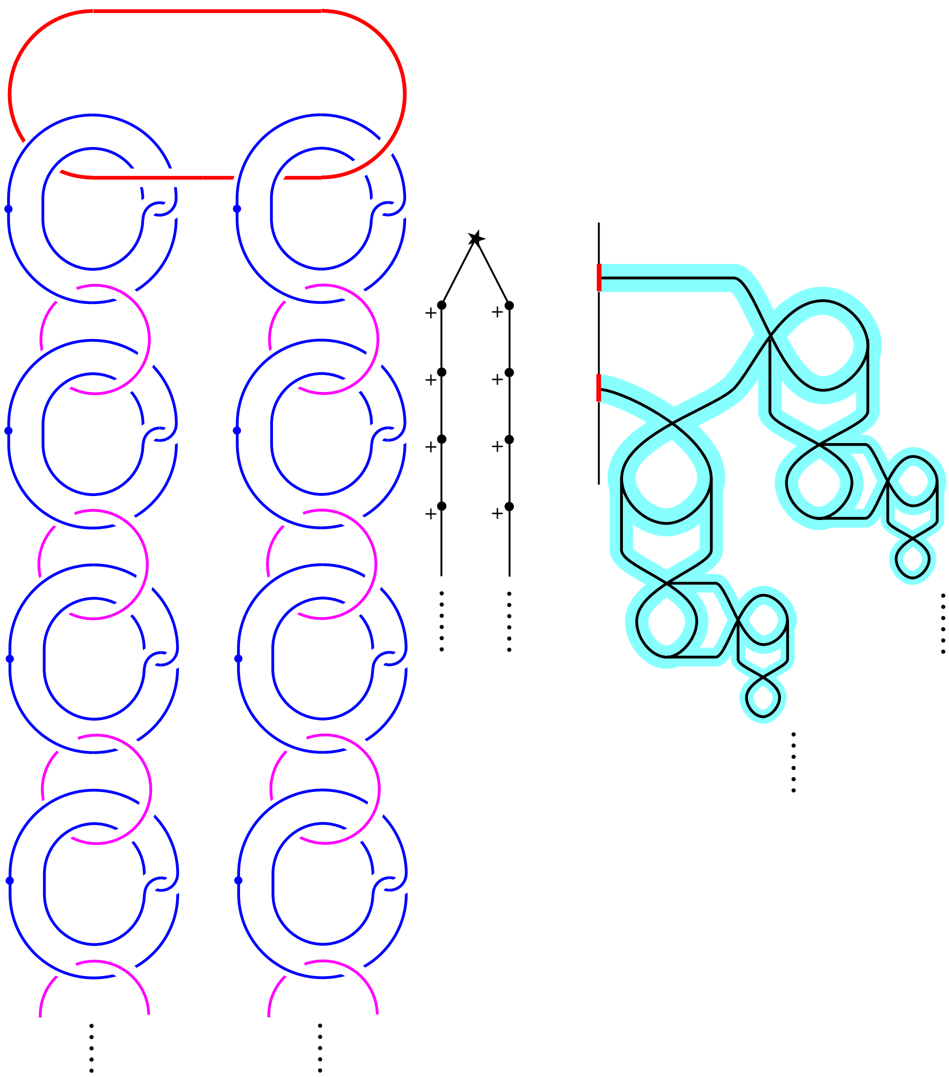

Design（設計図）$\mathfrak{D}$ “in” $H = D^2 \times D^2$

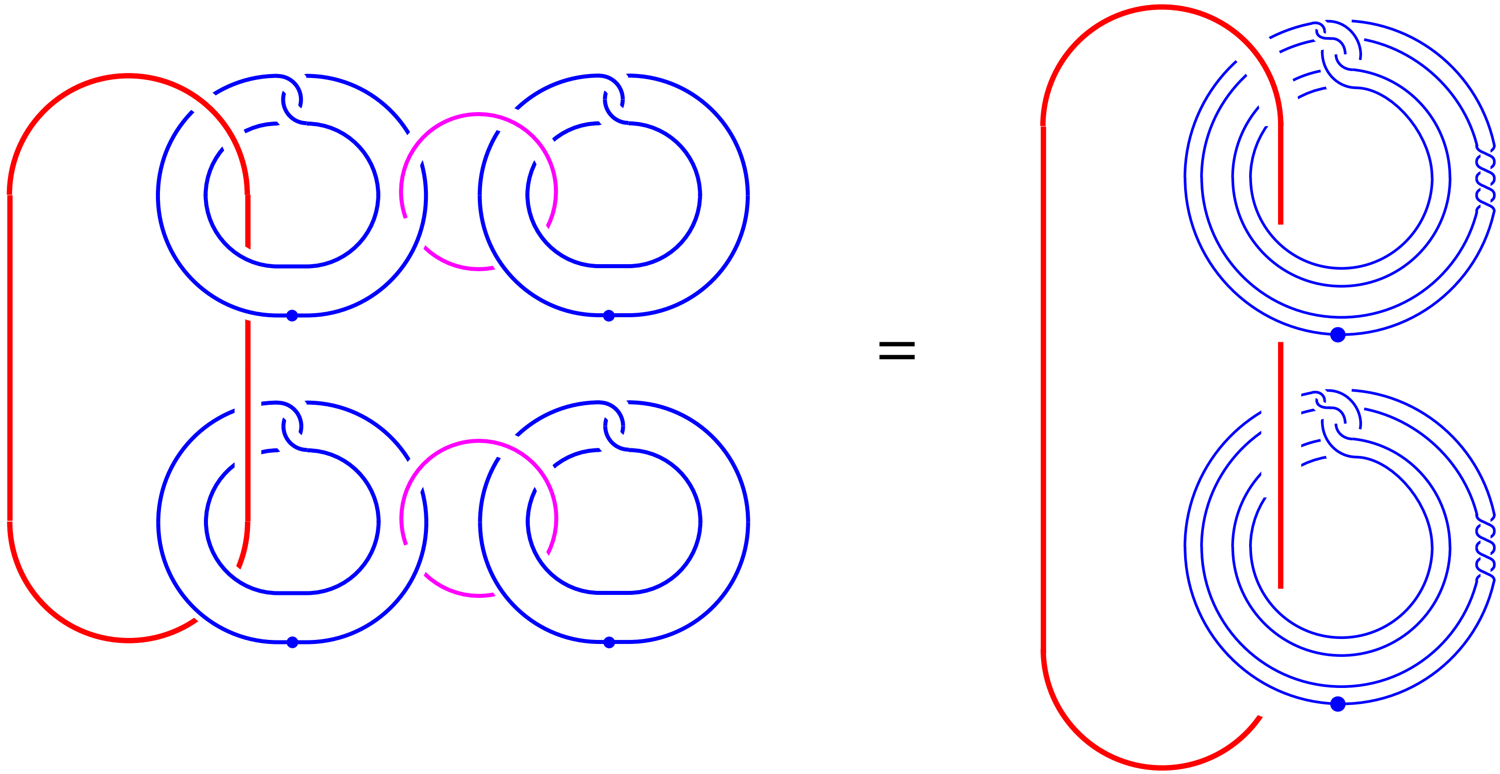





$X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \cdots$ generalized Whitehead link （総称）

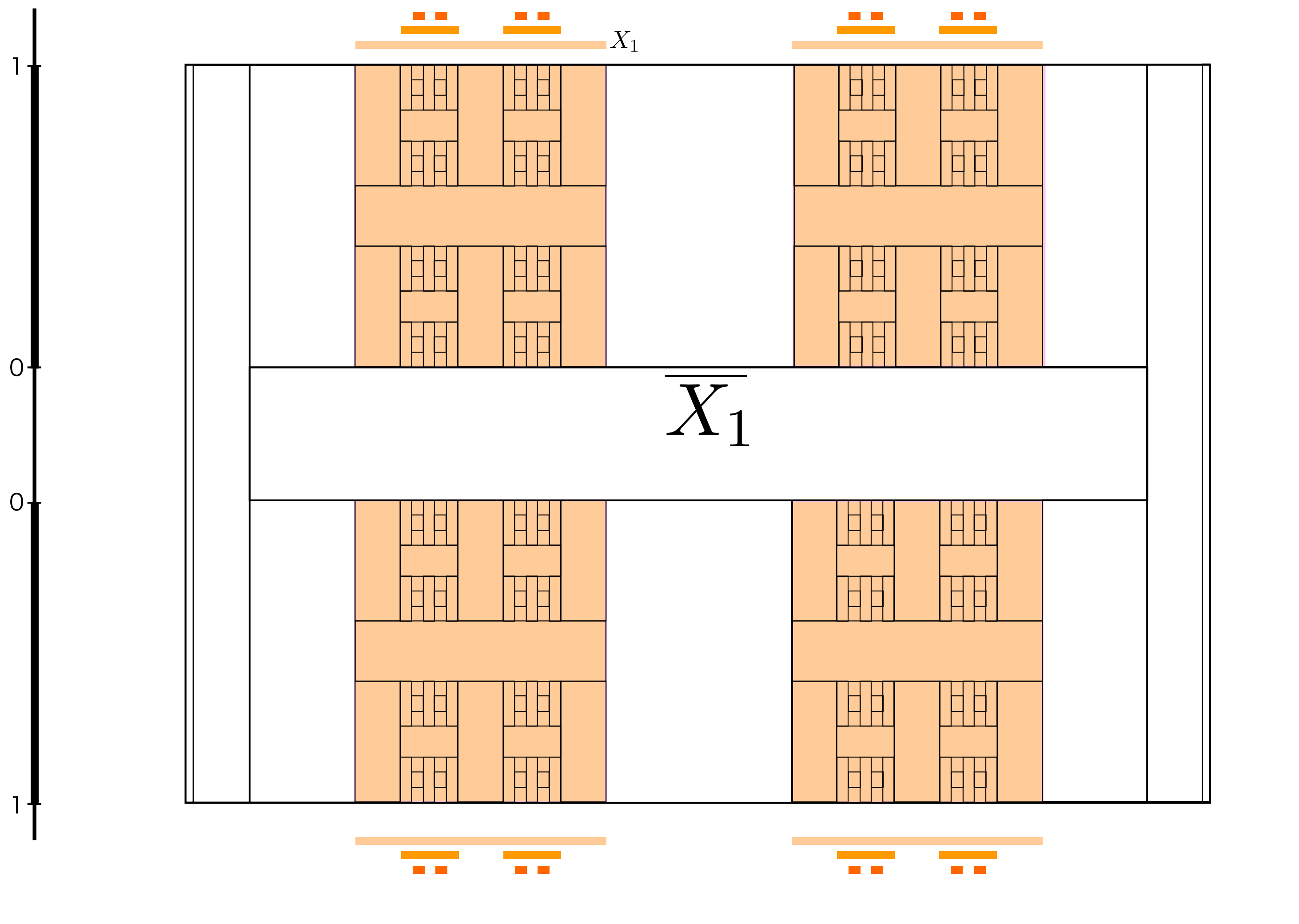
この図では $X_n = W_n$（元祖 Whitehead $Wh_n$）





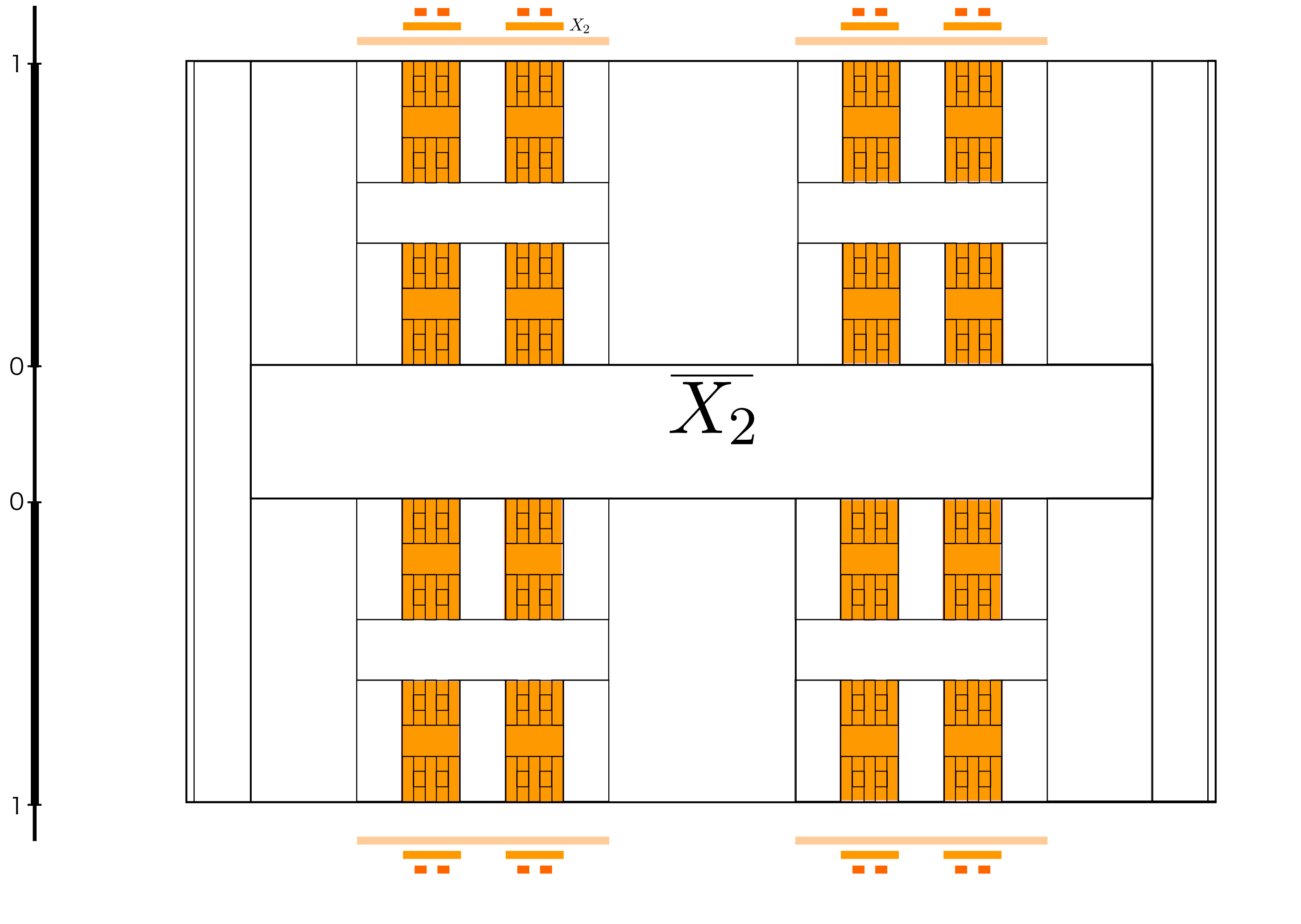
More complicate $X_2$　（３章 p.396）

Freedman's Diagram 5.4



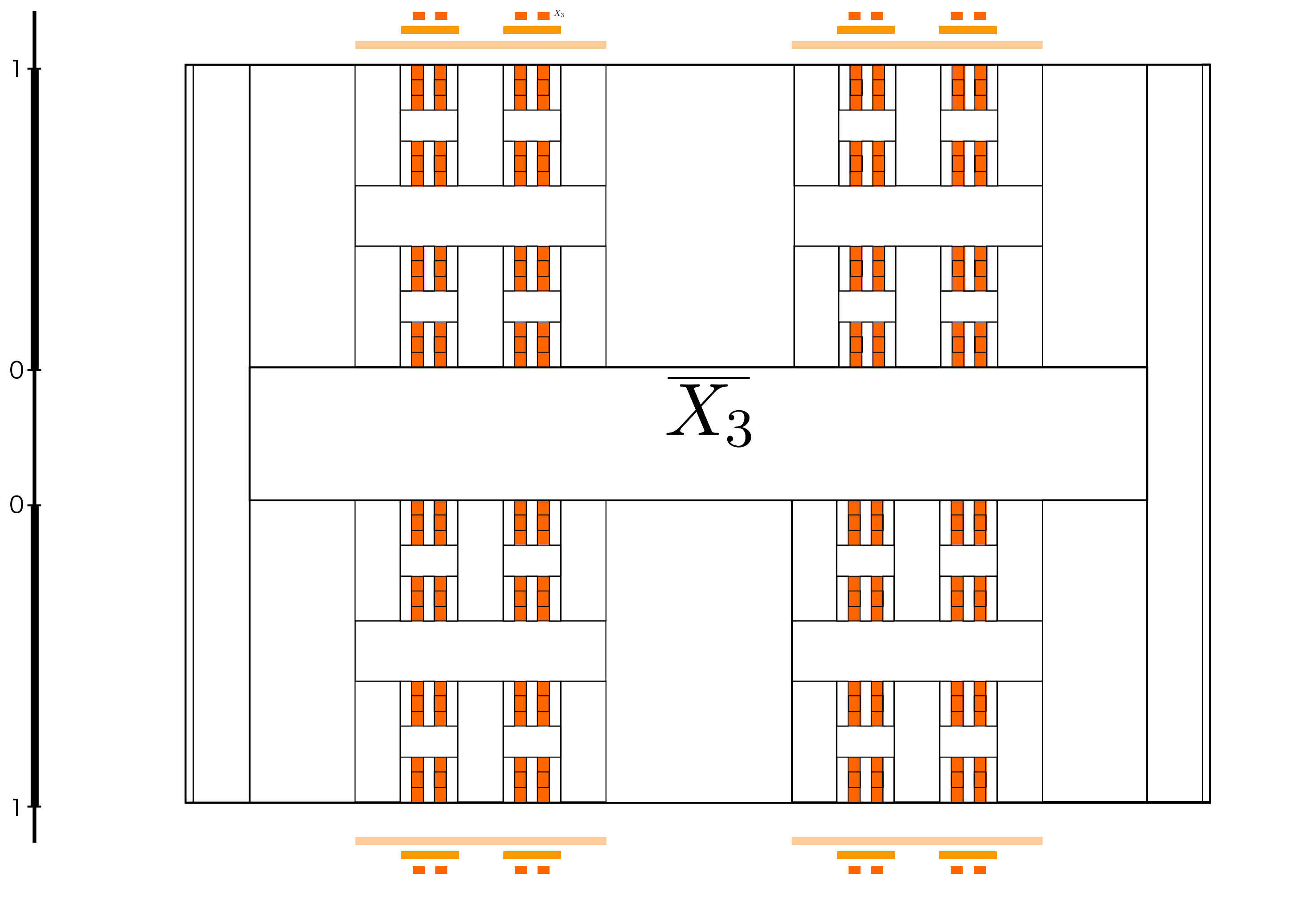

$$\overline{X_1} = X_1 \times [0,1]$$

Freedman's Diagram 5.4




$$\overline{X_2} = X_2 \times \text{“1st left pieces”}$$

Freedman's Diagram 5.4




$$\overline{X_3} = X_3 \times \text{“2nd left pieces”}$$

正確には　$\overline{X_2} = X_2 \times$ “1st left pieces” は

$$\begin{aligned} \overline{X_2} \quad &= \quad X_2^{:0} \times [.0, .1] \\ &\cup\ X_2^{:2} \times [.2, 1] \end{aligned}$$

$X_2^{:2}$ は $\mathrm{CH}_{.2\ldots}$ の共通部分を表わすLink $X_2$ の外部.

$X_2^{:0}$ は $\mathrm{CH}_{.0\ldots}$ の　（同上）p.402

正確には　$\overline{X_2} = X_2 \times$ “1st left pieces” は

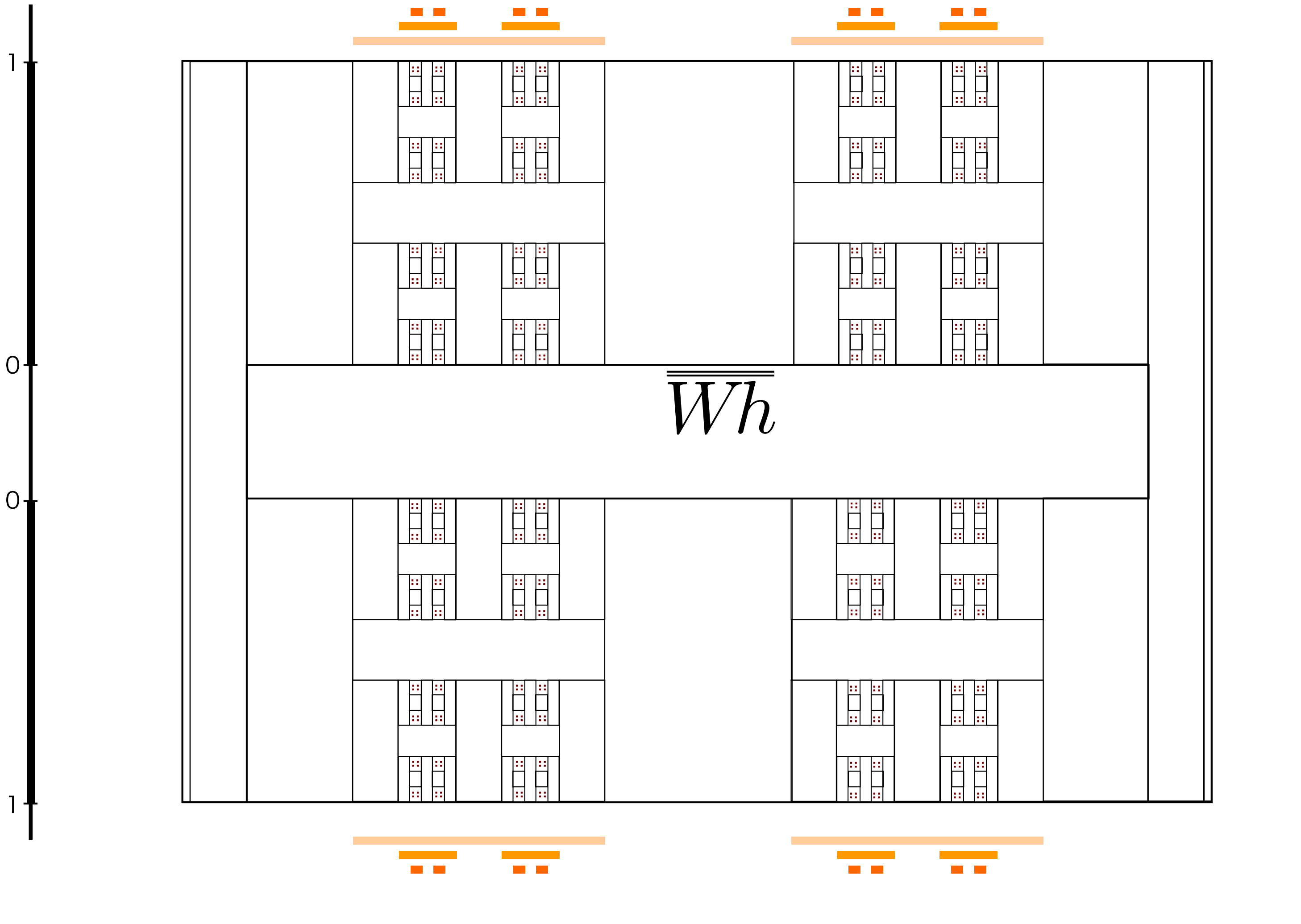
$$\begin{aligned}\overline{X_2} \quad &= \quad X_2^{.0} \times [.0, .1] \\ &\quad \cup\ X_2^{.2} \times [.2, 1]\end{aligned}$$

$X_2^{.2}$ は $\mathrm{CH}_{.2\ldots}$ の共通部分を表わすLink $X_2$ の外部.
$X_2^{.0}$ は $\mathrm{CH}_{.0\ldots}$ の　（同上）p.402
　同様に

$$\begin{aligned}\overline{X_3} \quad &= \quad X_3^{.00} \times [.00, .01] \\ &\quad \cup\ X_3^{.02} \times [.02, .10] \\ &\quad \cup\ X_3^{.20} \times [.20, .21] \\ &\quad \cup\ X_3^{.22} \times [.22, 1]\end{aligned}$$

$X_3^{.c_1c_2}$ は $\mathrm{CH}_{.c_1c_2\ldots}$ の共通部分を表わす $X_3$ の外部.
その極限（$\overline{X_\infty}$）が $\overline{\overline{\mathrm{Wh}}}$.

Freedman's Diagram 5.4




$$\overline{\overline{\mathrm{Wh}}} = \cap_{n=1}^{\infty} \overline{X_n} = \bigcup_{r \in \mathrm{CS}} (X_r \times \{r\})$$

## 5章で決めた記号 (p.402)

$$B_k := \overline{X_k} \cap \{D' \times S^1 \times \text{“}k\text{-th middle thirds”}\}$$ 緑

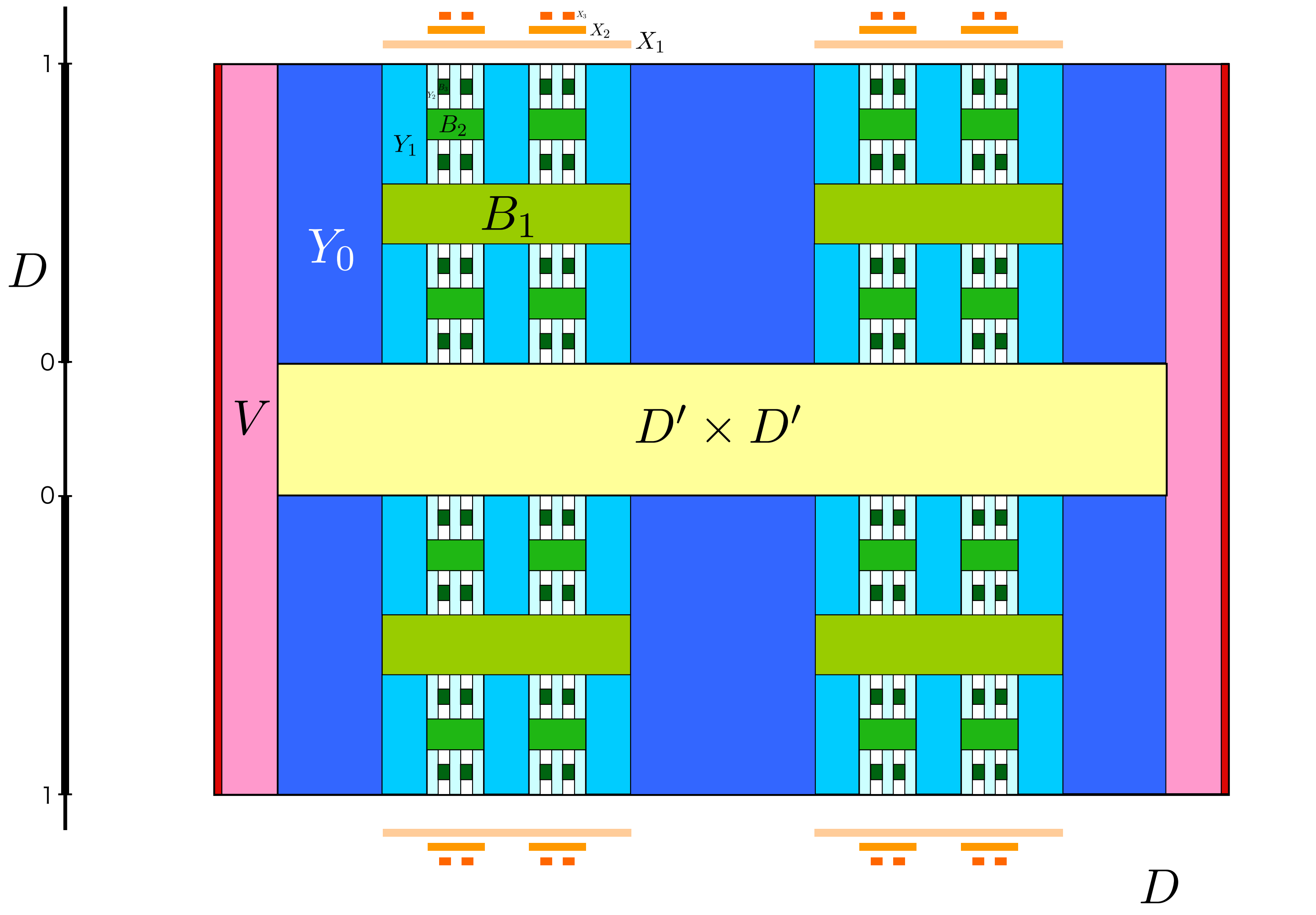
$$\mathcal{A} := H - \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{int} B_k \cup \mathrm{int}(D' \times D') \right\}$$

$$\boxed{\mathcal{D} := \mathcal{A} \Big/ \overline{\overline{Wh}}}$$

$$\mathcal{D} - \overline{\overline{Wh}} = V \cup Y_0 \cup Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots ,$$

$$Y_k := \mathrm{cl}\left(\overline{X_k} - (\text{third of } \overline{X_k}) \cup \overline{X_{k+1}}\right)$$ 青

Y. YAMADA




Design（設計図）$\mathfrak{D}$ "in" $H = D^2 \times D^2$

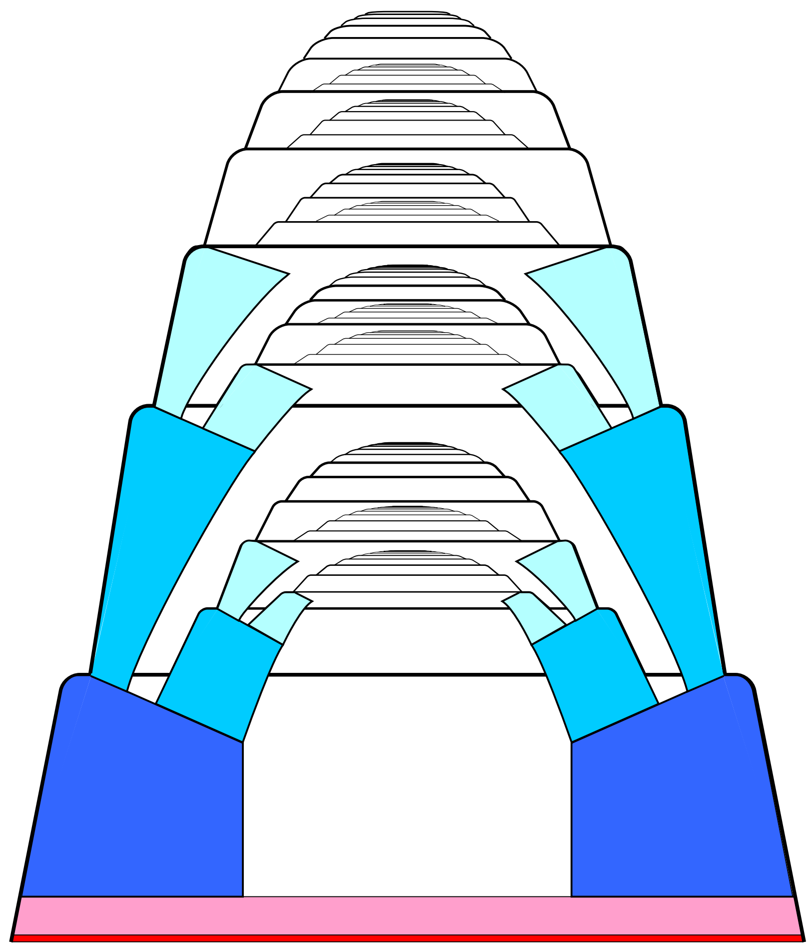
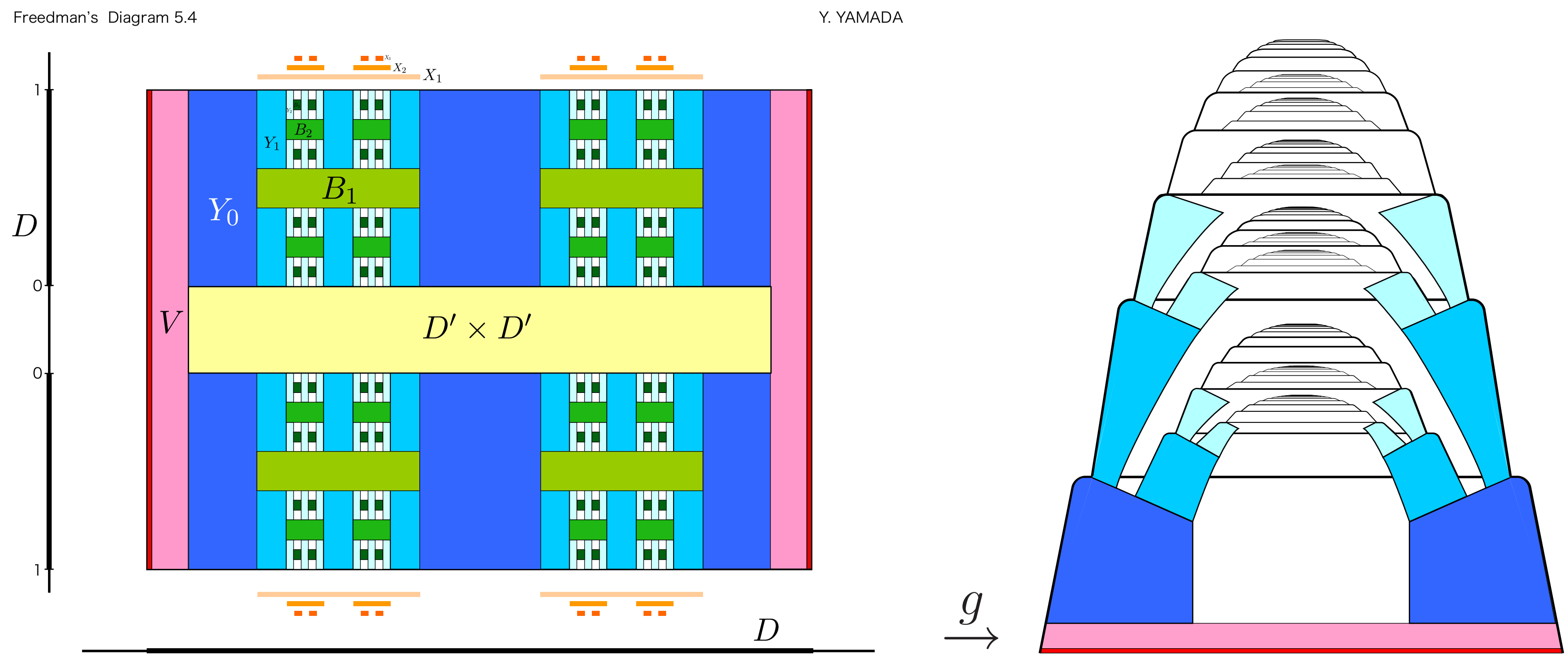
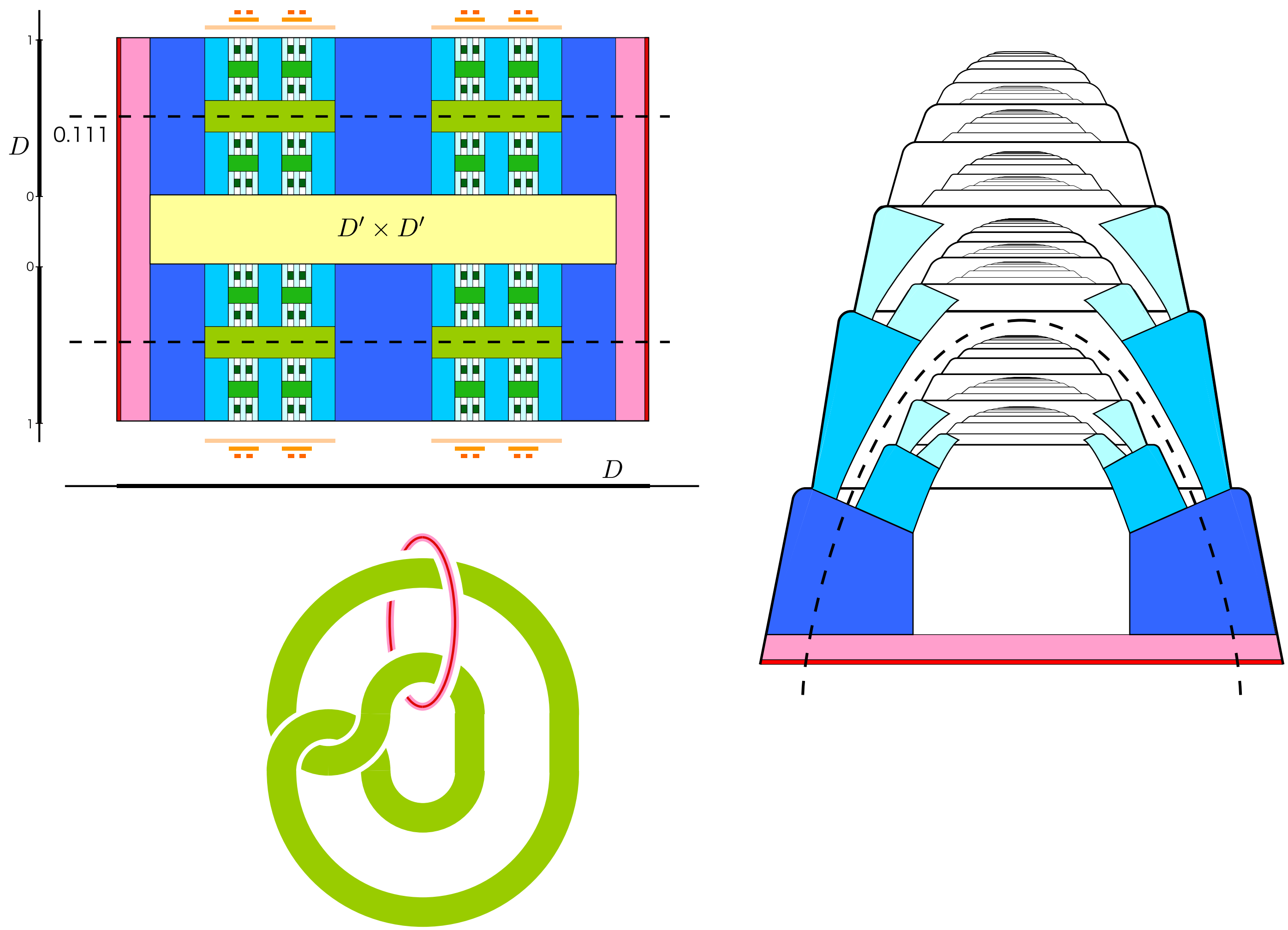


Image ($g : \mathfrak{D} \to \mathrm{CH}$)　$g$は全射ではない．gap (スキマ)がある．

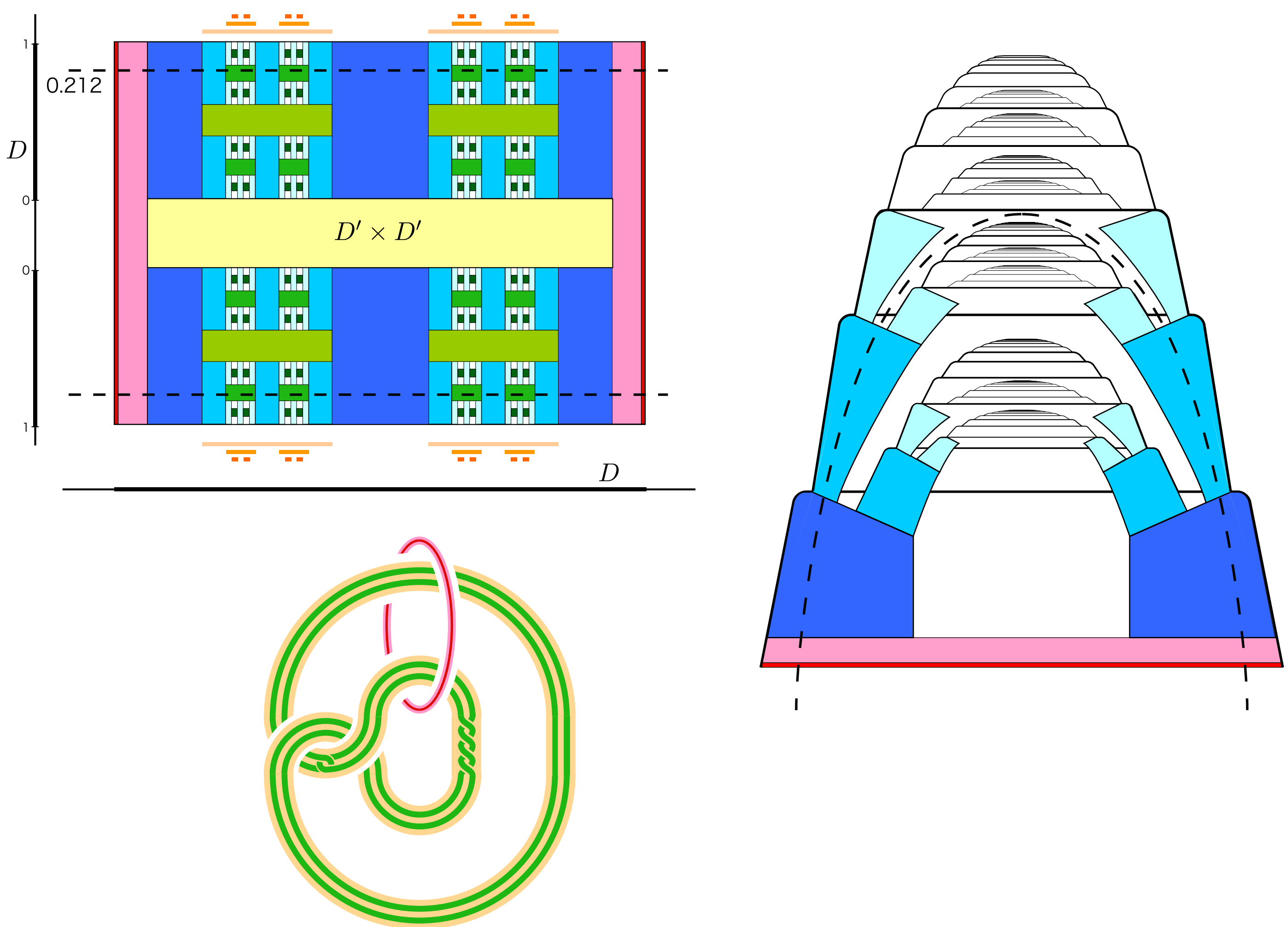



map $g : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathrm{CH}$

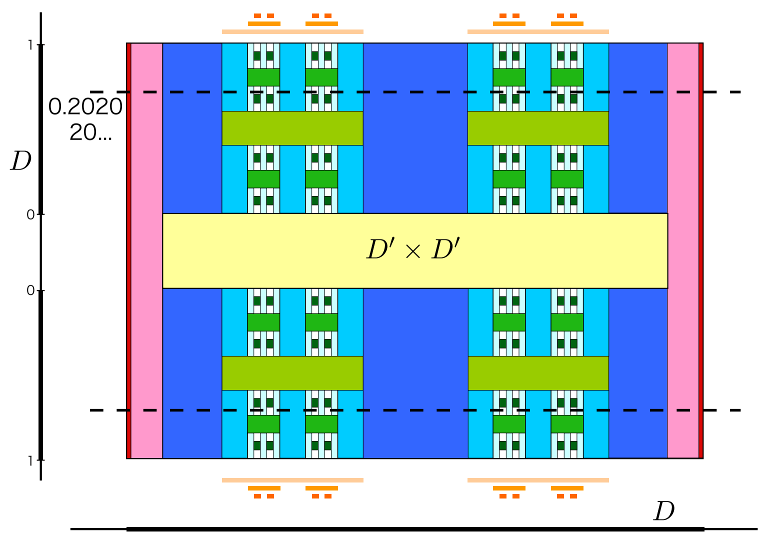
「Level $r$」を Solid torus $D_1^2 \times \partial D_2^2(r)$ の意味とすると…

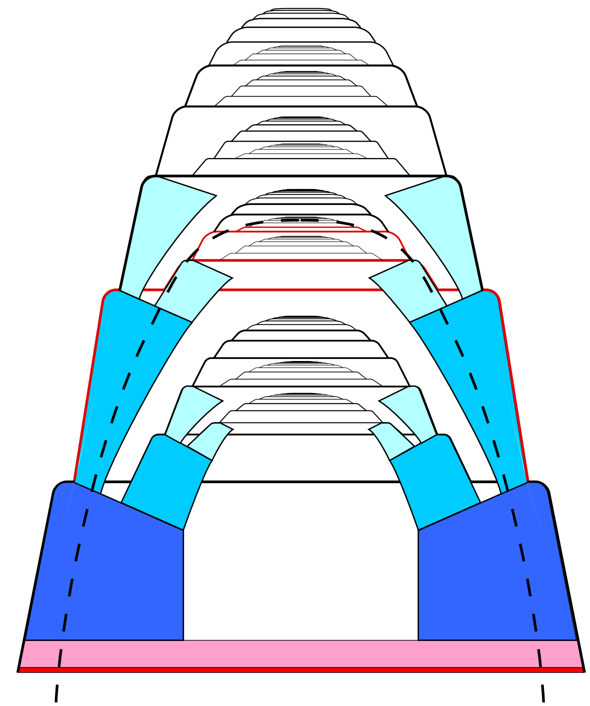


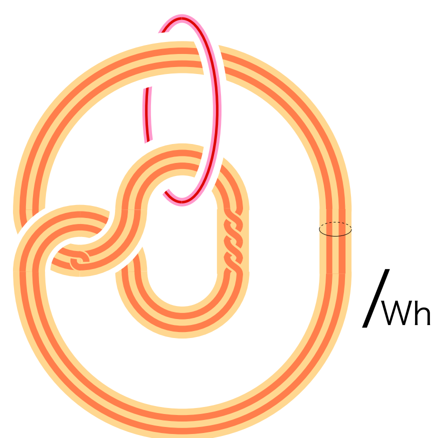

Level $r = 0.111$ ($\notin$ CS)




Level $r = 0.212$ ($\notin$ CS)



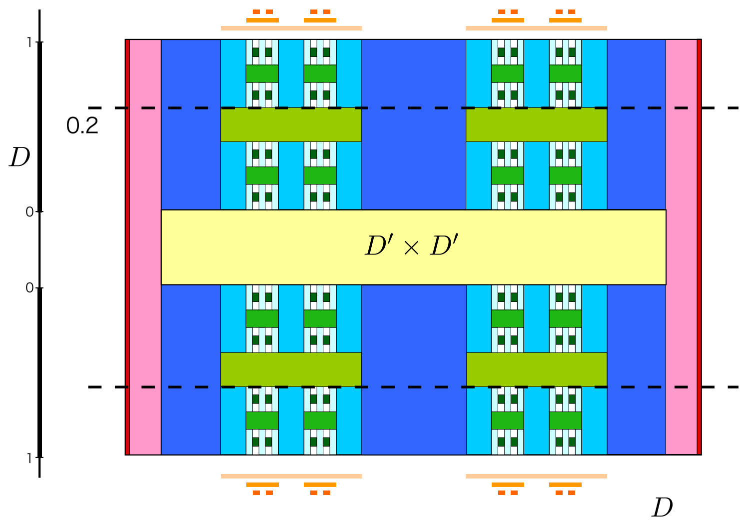



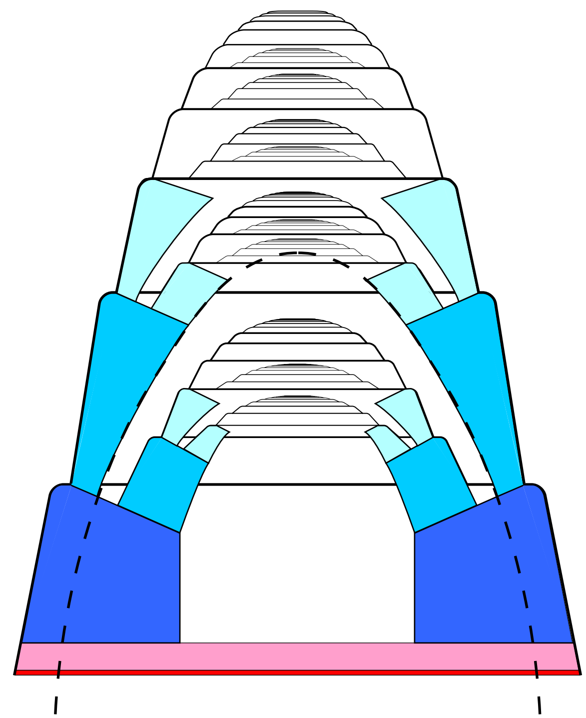


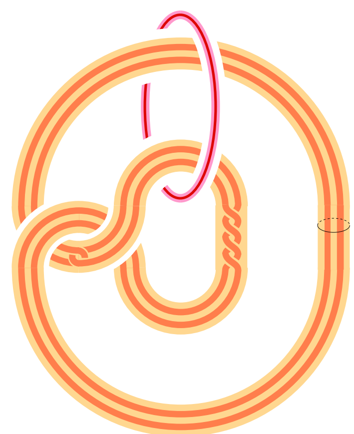

Level $r = 0.2\dot{0}\dot{2} = 0.2020202\cdots \ (\in \mathrm{CS}^-)$

$\mathrm{CH}_r$ を表わす 連続体 $Wh = X_{k=\infty}$ がつぶされている.

円板が見えたかと思ったが…（誤解が判明；皆様に感謝）





Level $r = 0.200 \cdots = 0.122 \cdots \ (\in \mathrm{CS} - \mathrm{CS}^-)$