２００９年１０月１８日　Casson-Freedman 理論研究会

Freedman 原論文に学ぶ　６章・８章　$\boxed{\text{その}\mathbf{2}}$

山田 裕一　　（電気通信大学）

・６章：

The decomposition space CH/gaps+
intermediate between CH and H

・８章：

The approximation of $\alpha : H \to \mathrm{CH}/\{\mathrm{gap}+\}$

ここまで　Freedman のアイデア（写像gの構成）

再埋込定理を無限回使って CH達 の包含族$\{\mathrm{CH}_r\}_{r\in\mathrm{CS}}$
を作った上で

各々の Casson Handle の世代kを上げていくこと

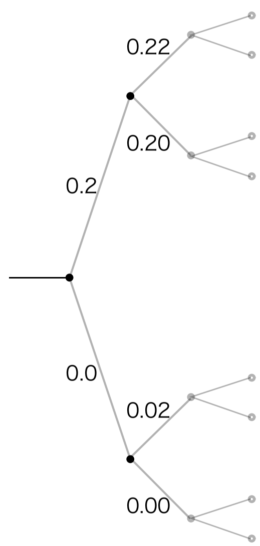
を

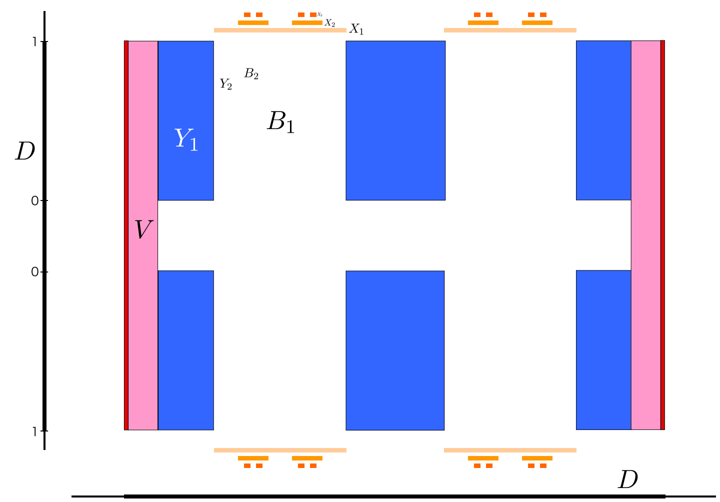
CSの 小数点以下の 桁数 k を上げていくこと

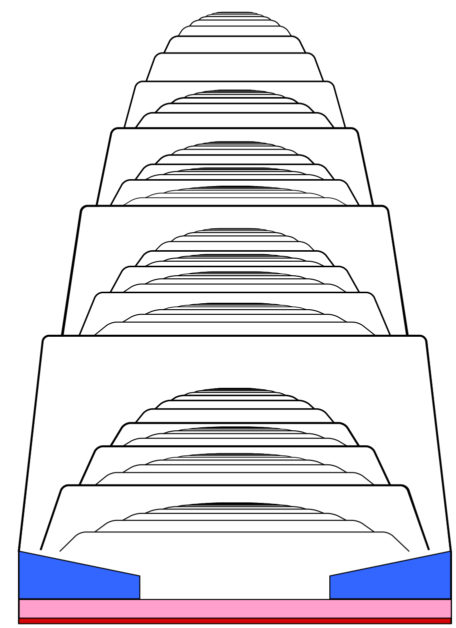
に

対応させて,

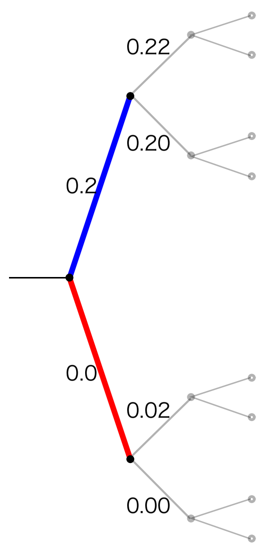
写像 $g : \mathcal{D} \to \mathrm{CH}$ を帰納的に構成した.

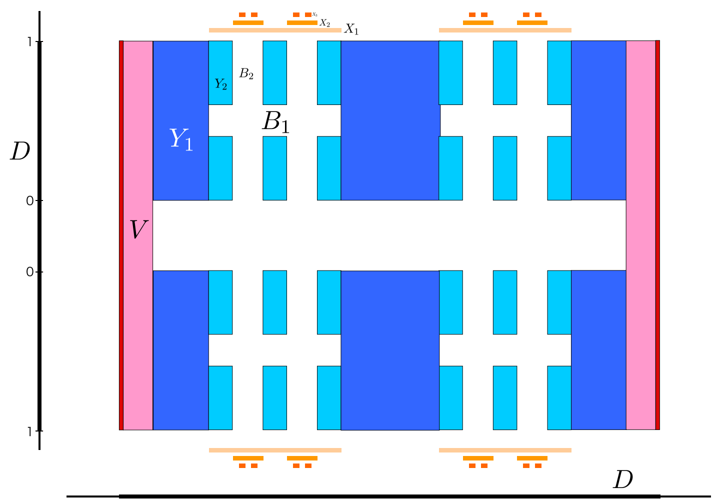


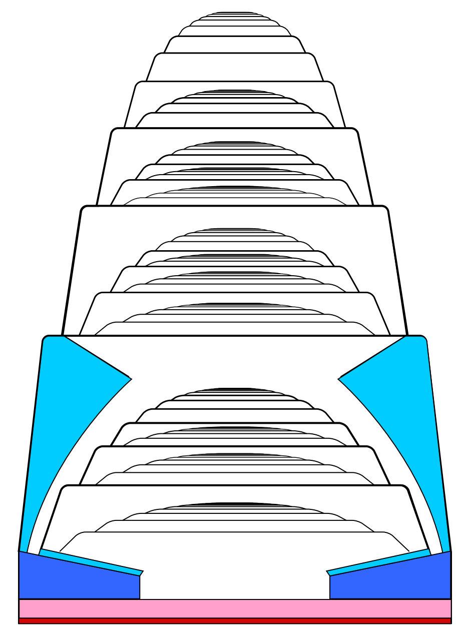




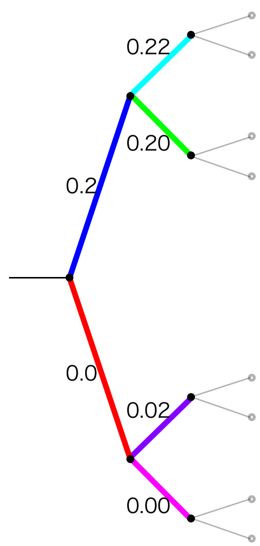
$k = 1$ 初手. まだ スカスカ

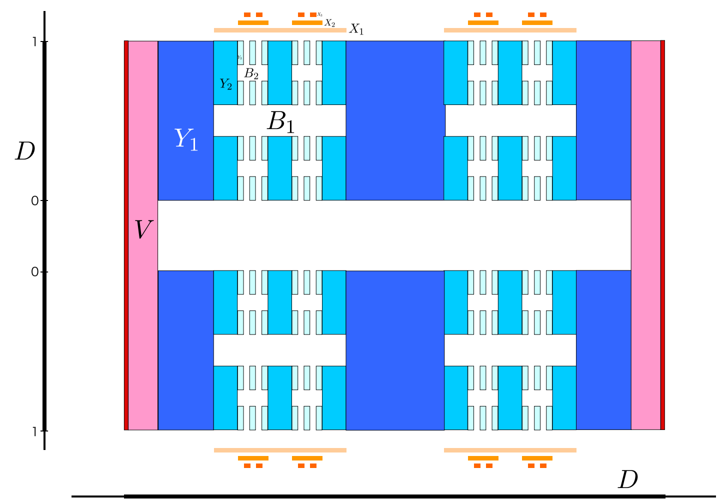


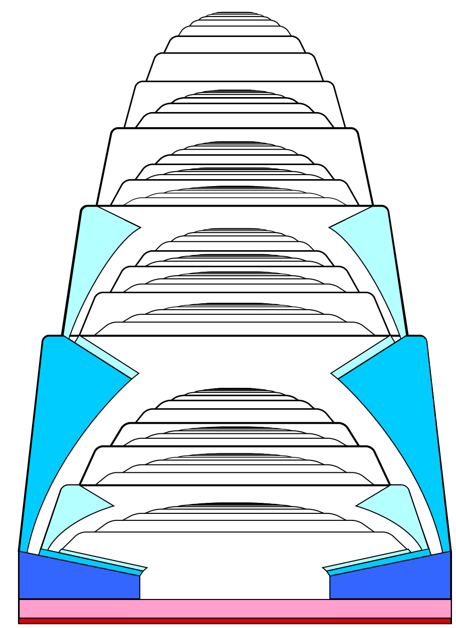




$$k = 2$$



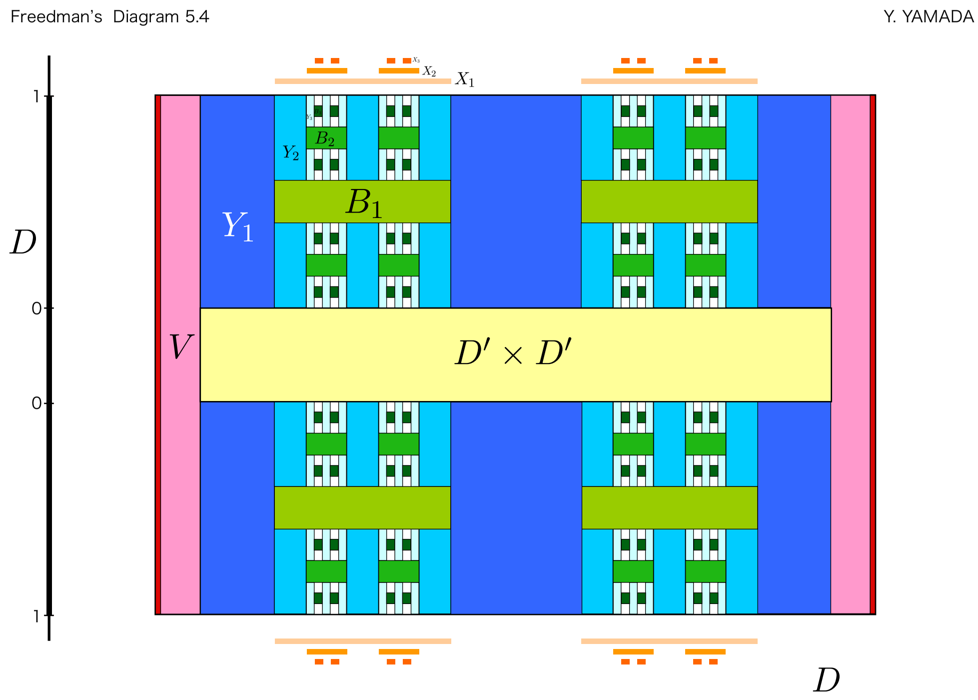


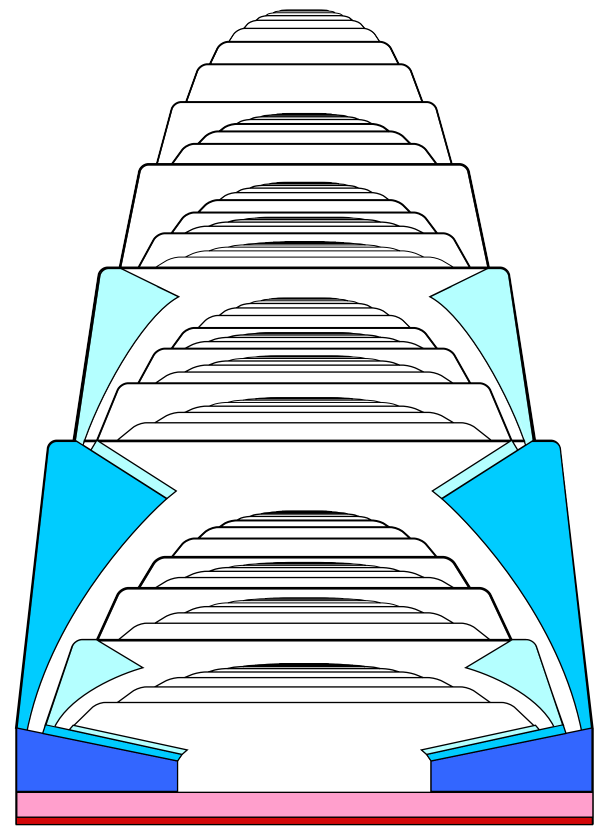


$$k = 3$$

k が有限である限り 無限回反復 は全く使っていない.
各CH の“有限世代止まり” しか使っていない.

ここからが 本当の６章





map $g : \mathfrak{D} \to \mathrm{CH}$

ここで証明方法を説明

Solid torus B_k^j には ホモロジーがあるから つぶしてはいけない.

$\Rightarrow$ 各々 円板 d_k^j を張らせてつぶす.

j は k ごとに決まる有限の通し番号＝成分数.

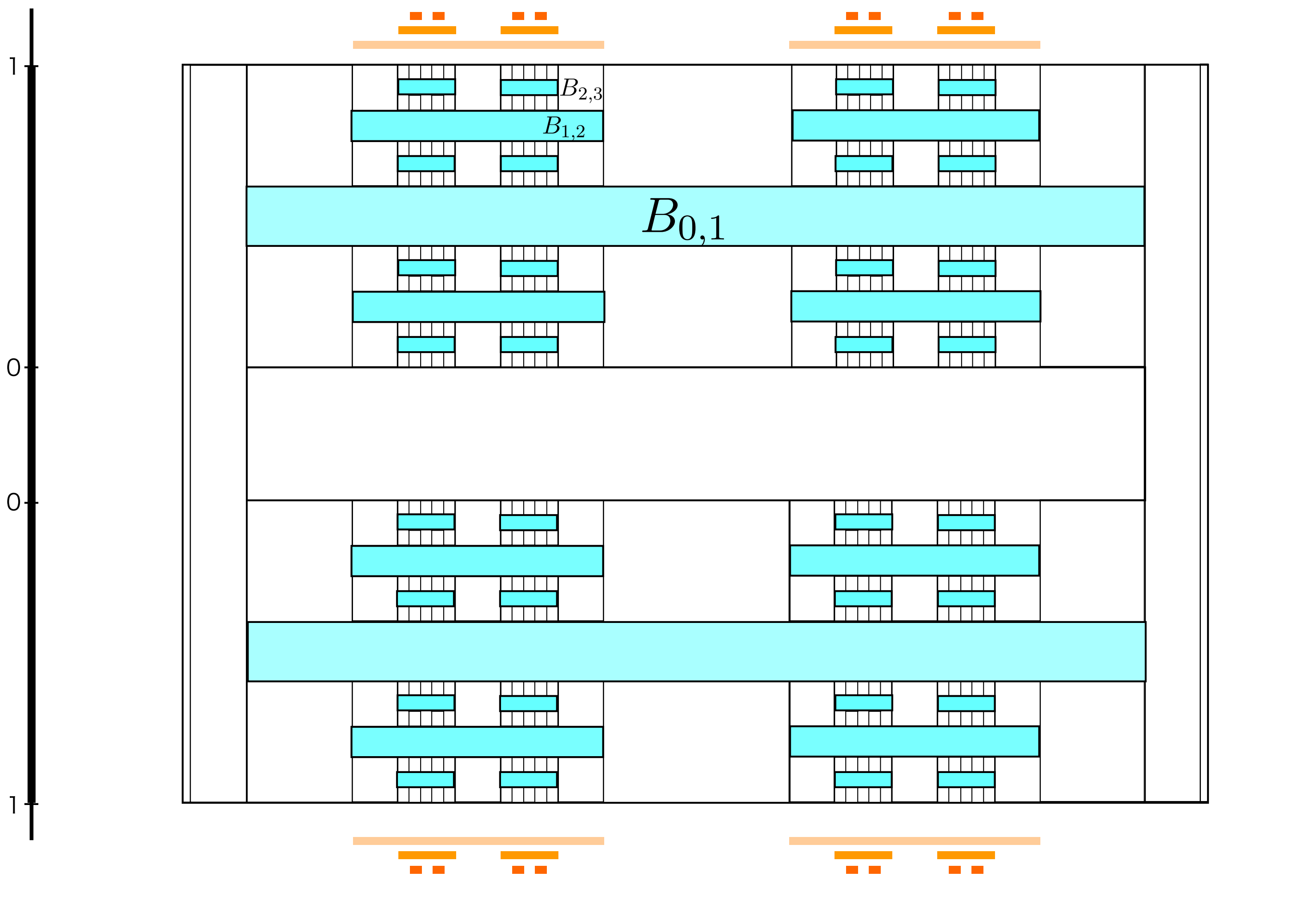
The condition of the disks $\{d_k^j\}$ that bounds c_k^j (p.407):

(1) Each d_k^j is imbedded in $\mathrm{int}\mathcal{A} - \cup_{l=k}^{\infty} B_{l,l+1}$

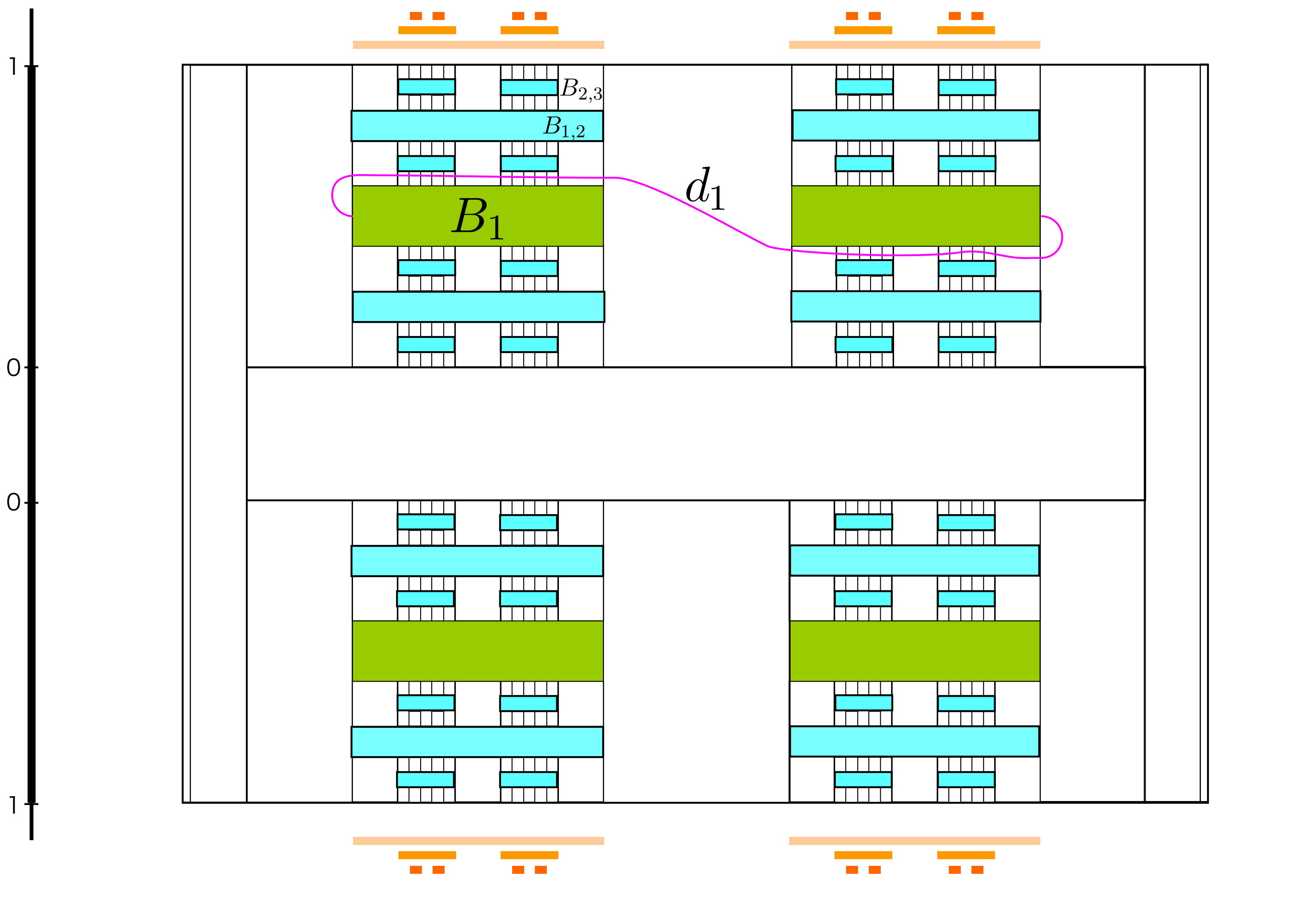
(2) $d_k^j \cap d_{k'}^{j'} = \emptyset$ for $k \neq k', j \neq j'$.

(3) No disk intersects to the component of $\overline{\overline{Wh}}$ in more than one point.

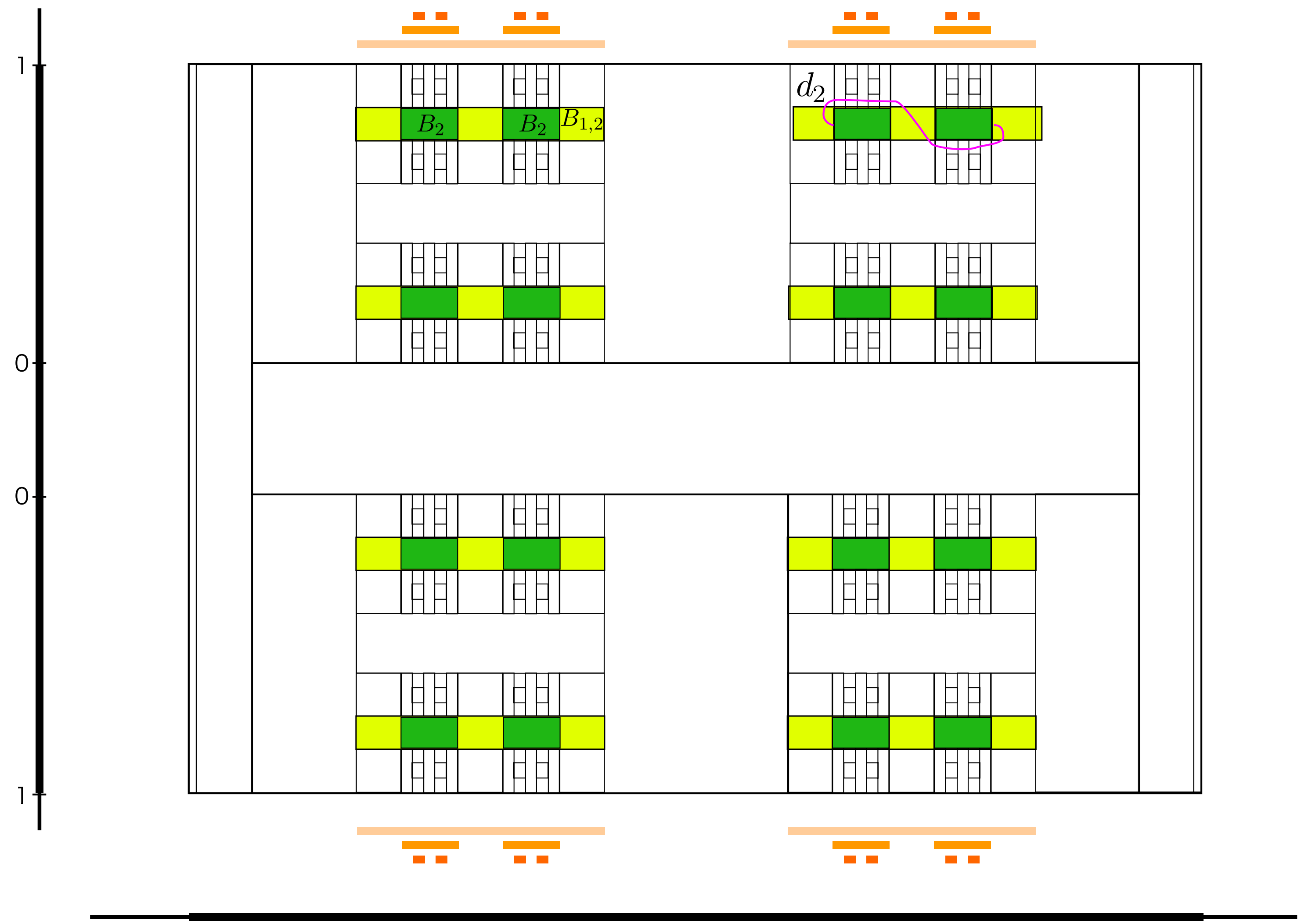
(4) No component $\overline{\overline{Wh}}$ intersects more than one disk of the collection $\{d_l^j$ with $l \leq k, \forall j\}$. (???)



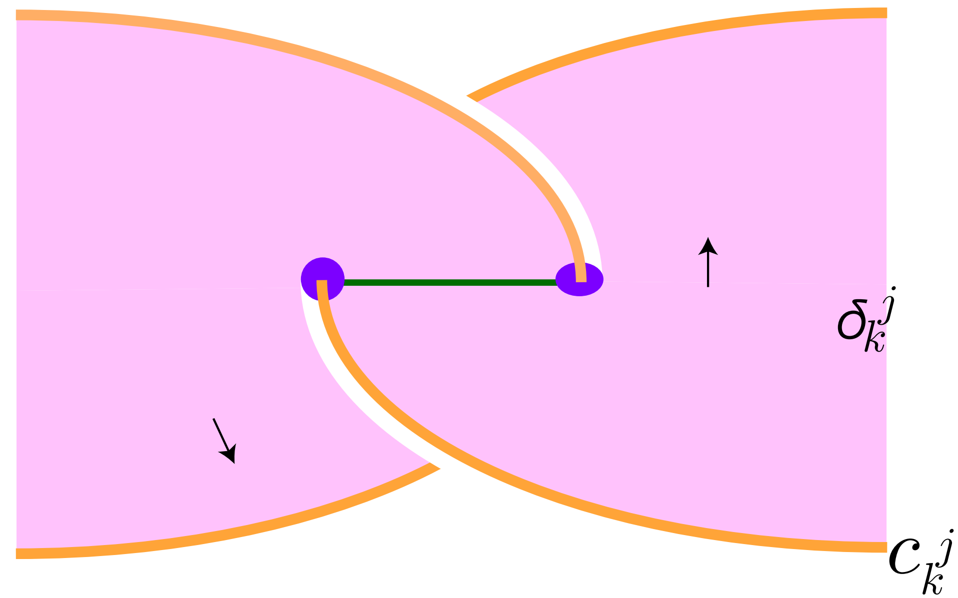
$$B_{k,k+1} = \overline{X_k} \cap \text{“}k + 1\text{-th middle third”} \ \text{(p.406)}$$



The disk d^j_k must to be disjoint from $\bigcup_{l=k}^{\infty} B_{l,l+1}$



Solid tori $B_2 \subset$ solid tori $B_{1,2}$, *null-homotopic* like $X_2 \subset X_1$.

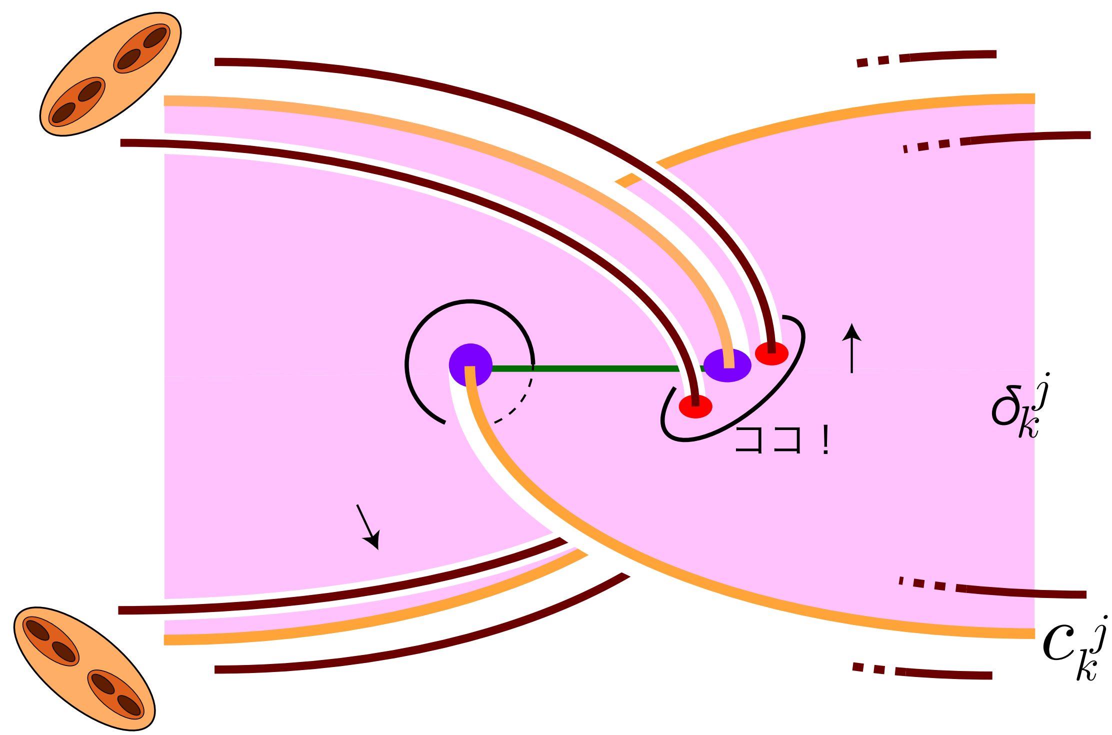


The immersed disk δ_k^j that bounds c_k^j = core of B_k^j

The disk d_k^j will be constructed as

$$d_k^j = \delta_k^j + \theta_k^j$$

where $\theta_k^j : (\delta_k^j, \partial\delta_k^j) \to (\mathbf{R}_r, \mathrm{const})$ is a function to control（ずらす）the r-coord. 問題は...



問題は level $r \in \mathrm{CS}$.

$c_k^j \times \{r\}$の近傍には　$\overline{\overline{Wh}} = \cup_{r \in \mathrm{CS}}(X_r \times \{r\})$　が入っていた．

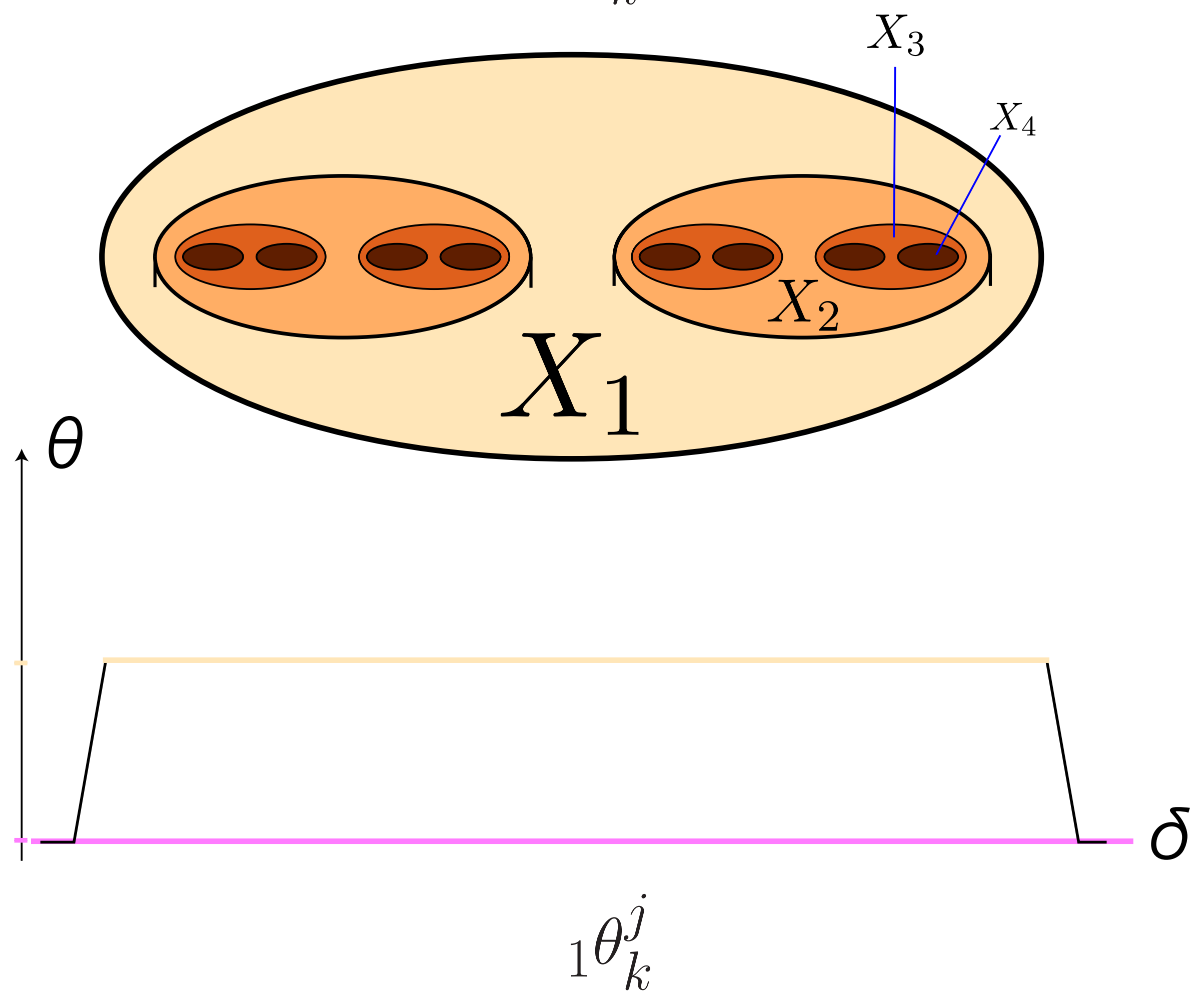
$\mathfrak{D} = \mathcal{A}/\overline{\overline{Wh}}$ では１点につぶされている．（成分ごとに）．

$\Rightarrow$ 関数 θ_k^j をたいそう注意深く構成する．

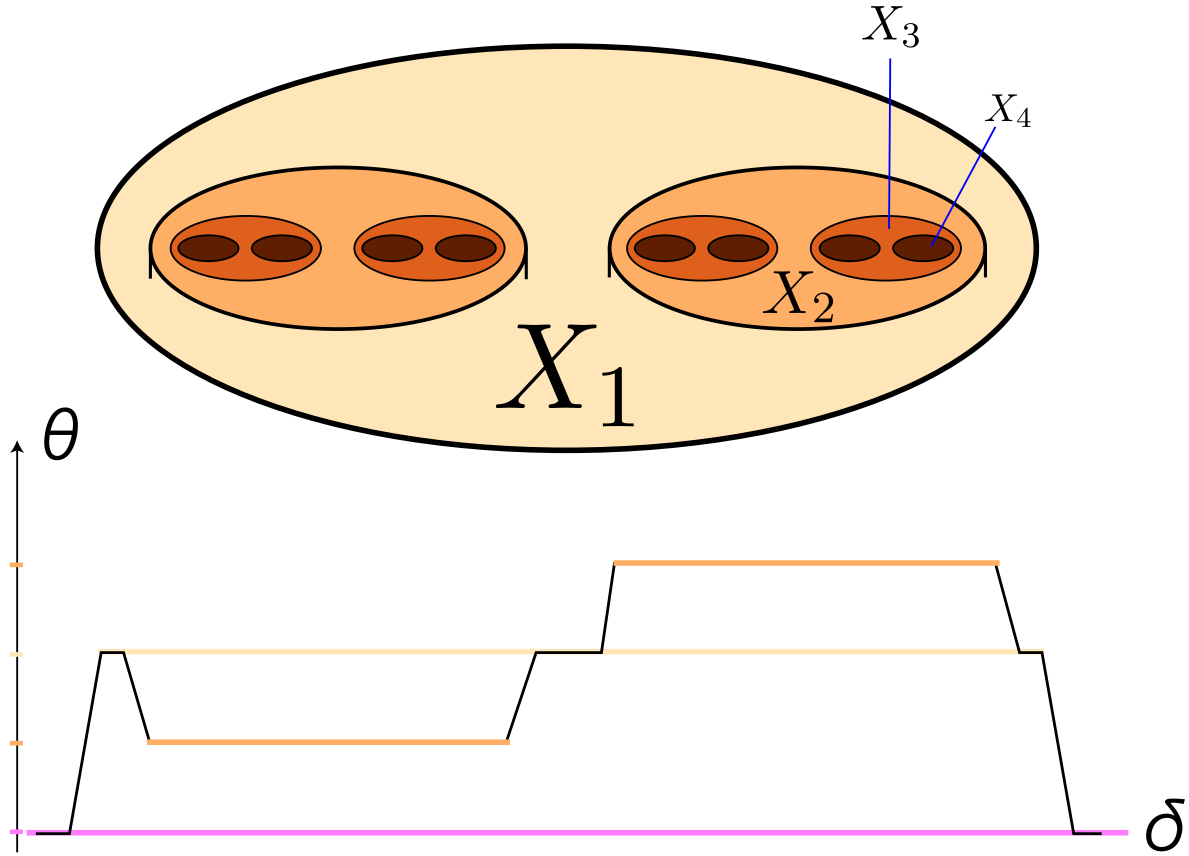
関数 θ^j_k の構成：　またしても 帰納法！

$$ {}_q\theta^j_k \qquad q = 1, 2, \cdots $$

The inductive construction of θ_k^j like "Cantor function" (p.409)

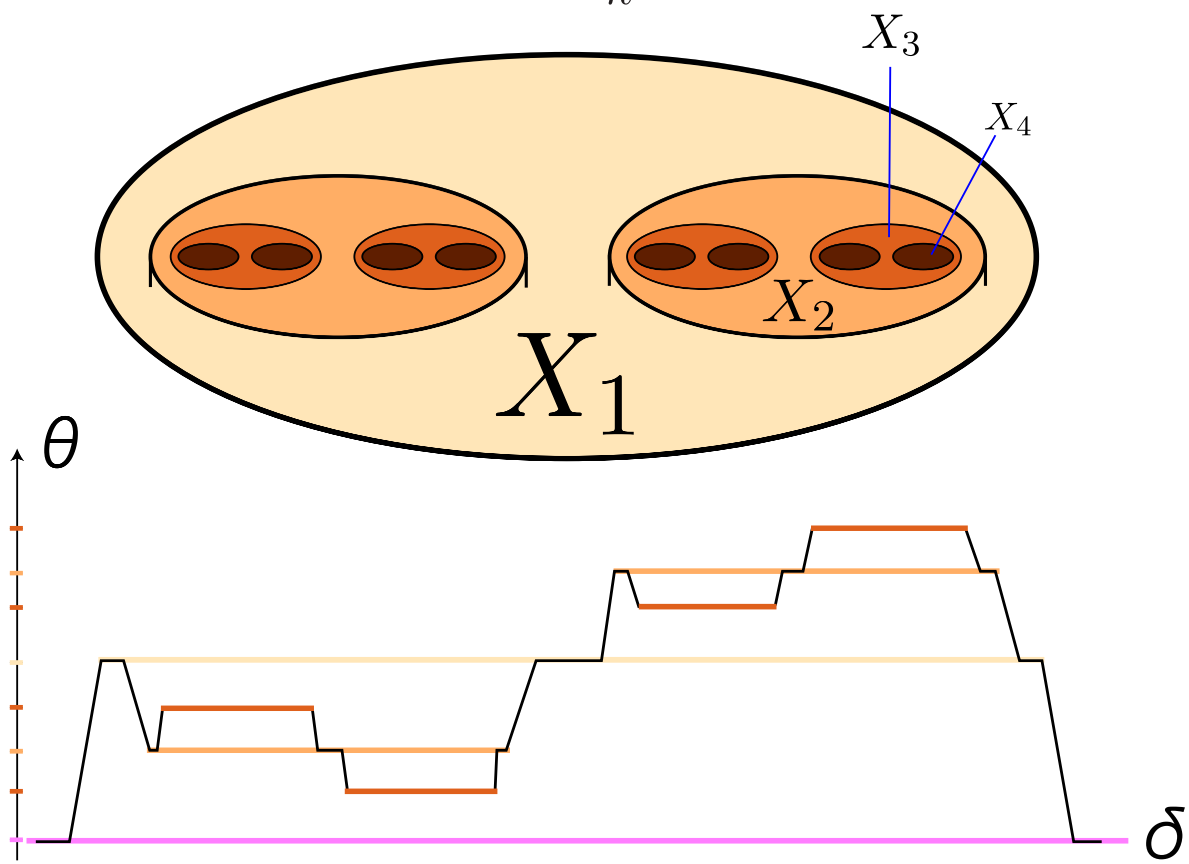


The inductive construction of θ_k^j like "Cantor function" (p.409)



${}_2\theta_k^j$

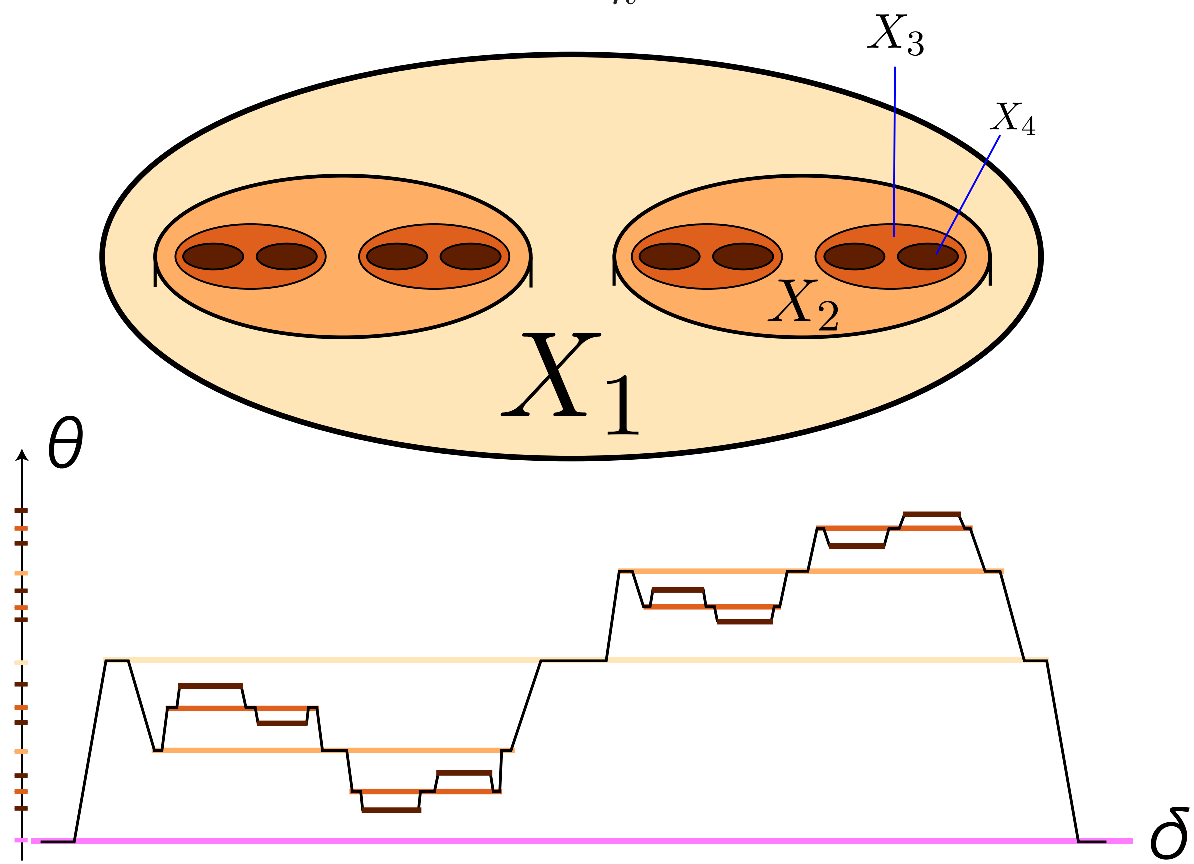
The inductive construction of θ_k^j like "Cantor function" (p.409)



${}_3\theta_k^j$

$\varepsilon_q := \sup |{}_{q+1}\theta_k^j - {}_q\theta_k^j|$ が $\varepsilon_{q+1} < \frac{1}{2}\varepsilon_q$ を満たすように.

The inductive construction of θ_k^j like "Cantor function" (p.409)



$$\theta_k^j := \lim_{q\to\infty} {}_q\theta_k^j$$

θ の停留値 r 座標 をすべて異なる CS^- の値に選ぶ！Perfect!

６章の終りになぜか...(p.412)

Theorem 8.3 （８章で証明する）

$$\forall\,\mathrm{CH},\quad \exists\,\text{homeomorphism } \alpha : \mathring{H} \to \mathrm{CH}/\{\mathrm{gap}^+\}$$

６章の終りになぜか...(p.412)

Theorem 8.3 （８章で証明する）

$$\forall\,\mathrm{CH},\quad \exists\,\mathrm{homeomorphism}\ \alpha : \mathring{H} \to \mathrm{CH}/\{\mathrm{gap}^+\}$$

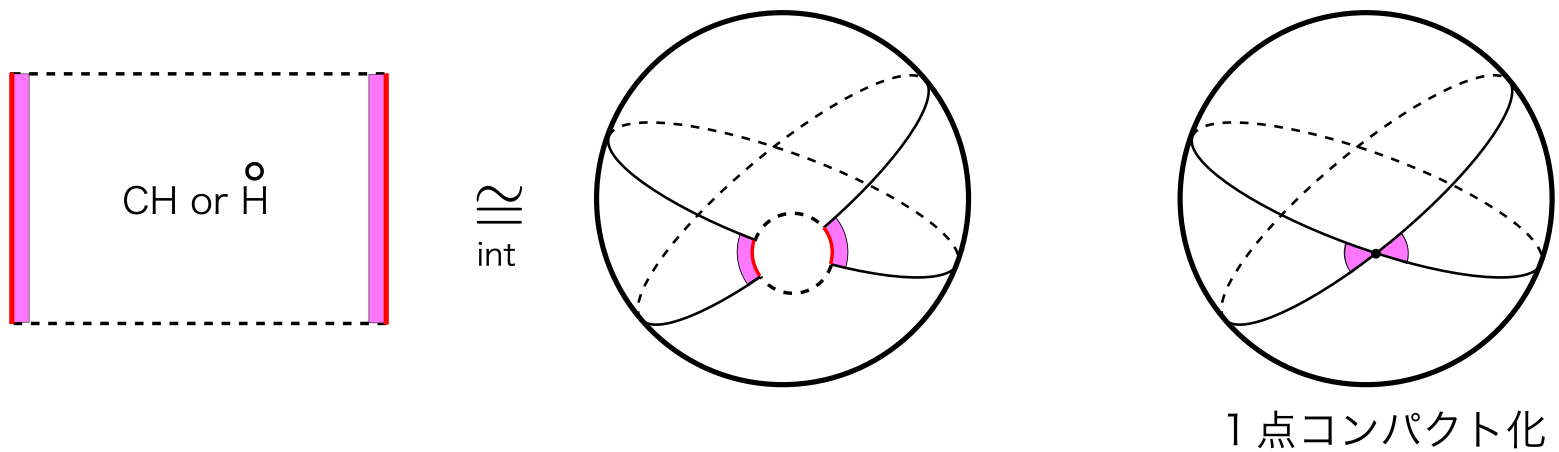
Theorem 1.1 （主定理：１章に書いてある）

$$\forall\,\mathrm{CH},\quad \exists\,\mathrm{homeomorphism} : \mathring{H} \to \mathrm{CH}$$

でも，８章も途中まで.
１章(p.362) に証明の 仕上げ が書いてある.

定理1.1 の証明方法(p.412)　“閉集合をたくさんつぶす” 写像を元にした写像 $\overline{\beta} = \beta^{-1} \circ \alpha : \mathring{H} \to \mathrm{CH}$ が “ある”.

$\mathring{H}$ と CH には, それぞれ Attaching part ∂^- と その collar W が指定されている. $c : \partial D^2 \times \mathrm{int} D^2 \times ([0,\epsilon], \{0\}) \to (W, \partial^-)$



$\mathring{H}$, CH から それぞれ, $\partial^- H$, $\partial^- \mathrm{CH}$ を取り除いて１点コンパクト化する. どちらも S^4 と diffeo.（$\mathrm{int} CH \cong \mathbf{R}^4$ p.381）
W の部分には $\overline{\beta}$ の特異点はない. $\overline{\beta}$ から作る写像 $f : S^4 \to S^4$ に９章の定理 を使う（仮定を確認）. □