

The Topology of Four-Dimensional Manifolds* の4,5章

丹下基生 (数理研)

平成 21 年 11 月 6 日

はじめに

2009 年 10 月 17 日から 20 日にかけてけいはんなプラザにおいて Freedman による The Topology of Four-Dimensional Manifolds を複数人によって読破するという研究集会（および勉強会）が開催された。Casson-Freedman 理論研究会である。この文章は筆者が担当した 4 章と 5 章のうち当日時間の都合でやむなく skip せざるを得なかった部分をこの場を借りて補完することとその 2 つの章全体をまとめることを目的としている。

この 4,5 章（Reimbedding theorem と design の構成）は Freedman の論文の中の最初の山であり、その理論を支える上で不可欠なステップでもある。この記念碑的論文を読み進める上で大きな助けとなるはずである。Freedman の論文を最後まで読み切った者がより大きな研究に踏み出されることを期待している。

このような有益な研究集会を開いてくださった電気通信大学の山田裕一先生、京都大学の加藤毅先生、東京大学の古田幹雄先生には大変感謝している。

4 Reimbedding Theorem

定義 4.1 $f : S^2 \rightarrow W^4$ が normal immersion であるとは次の条件がなりたつことである。

- (a) f が smooth である。
- (b) $f(S)$ は ∂W_i において、 ∂S で交わる。
- (c) f は ∂W に transverse
- (d) すべての自己交叉は $\text{int}(W)$ で transverse で double point のみ。

定義 4.2 W を単連結な 4 次元多様体とする。

$f : S \rightarrow W$ が normal immersion であるとする。このとき、 $\beta \in H_2(W)$ が f の algebraic dual とは、 $\beta \cdot [f(S)] = 1$ である。

*参考文献 (1)

注 4.3 W が単連結であることから β の代表元として (一般にははめ込まれた) S^2 がとれる。

定義 4.4 Z が $f : S^2 \rightarrow W$ の algebraic dual とは次の条件を満たすものをいう。

- (a) $Z \subset W$ が S^2 の immersion
- (b) $Z \cap \text{Im}(f) = \{x, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n\}$
- (c) $\forall i$ に対して x_i と y_i は交点数に関して反対符号をもつ。
- (d) $\forall i$ に対して Whitney circles c_i が存在して、 $c_i = \gamma_i \cup \delta_i$ となる 2 つの closed arc の union になっており、それぞれ端の 2 点を共有している (つまり $\partial\gamma_i = \partial\delta_i$) とする。
- (e) さらに、 γ_i は Z に埋め込まれており、 δ_i は S に埋め込まれている。
- (f) また c_i には $\partial d_i = c_i$ となる W の中ではめ込まれた disk がある。

とくに、 $n = 0$ のとき、algebraic dual を geometric dual という。

補題 4.5 (π_1 -lemma) 次の二つは同値である。

- (1) normally immersed surface $f : S \rightarrow W$ に対して

$$S' \sim S \quad (\text{regular homotopic relative } \partial)$$

となり、 S' が π_1 -neg. となる

- (2) S には algebraic dual が存在する。

ここで X 中の部分集合 A が X 中で π_1 -neg.(negligible) とは包含写像が誘導する射

$$i_* : \pi_1(X - A) \cong \pi_1(X)$$

が群同型になることをいう。

証明 (2) \Rightarrow (1)

まず $n = 0$ のときを示そう。このとき、 S には geometric dual Z が存在する。まず、 $i_* : \pi_1(W - f(S)) \rightarrow \pi_1(W)$ の核の生成元は S の meridian に当たるいくつかのループである。しかし、このループを Z に沿って動かしてやることで、 S とは絡まない位置に持っていける。よってこの元は W 中で単位元 e に縮む。つまり i_* の核は e のみである。また全射性は明らかである。

次に $n - 1$ の場合を仮定して n の場合を考える。algebraic dual の定義から Whitney circle と Whitney disk c_n, d_n が存在する。今、 d_n が S に有限個の点で (横断的に) 交わっているとす。このとき、Casson move (いわゆる finger move) によってその交わり

の近傍で S を δ_n の方向に少しずつずらしていくと S は δ_n を横断し、突っ切る (図 1)。このような操作を交点 $S \cap d_n$ に対して全て行くと S は regular isotopy により 2 点で新しく自己交差を許しながらも d_n と交わらないようなものができる。(ここで、自己交差を γ_n の方向にずらして外そうとしても S と Z の自己交差が逆に増えてしまいダメである。) このように S に Casson move を施すことによって d_n が S と交わらないようにできる。

次に、このような d_n を使って S を singular Whitney trick をする。この操作によって、はめ込まれた Z に沿って S (γ_n の近傍) を slide してやることで Z と S の交わり (つまり x_n, y_n) をなくすことができる (図 2)。結果的に S は regular isotopy によって $Z \cap S = x_1, y_1, \dots, x_{n-1}, y_{n-1}$ とすることができる。よって $n-1$ の場合に帰着される。

(1) \Rightarrow (2) は省略する。

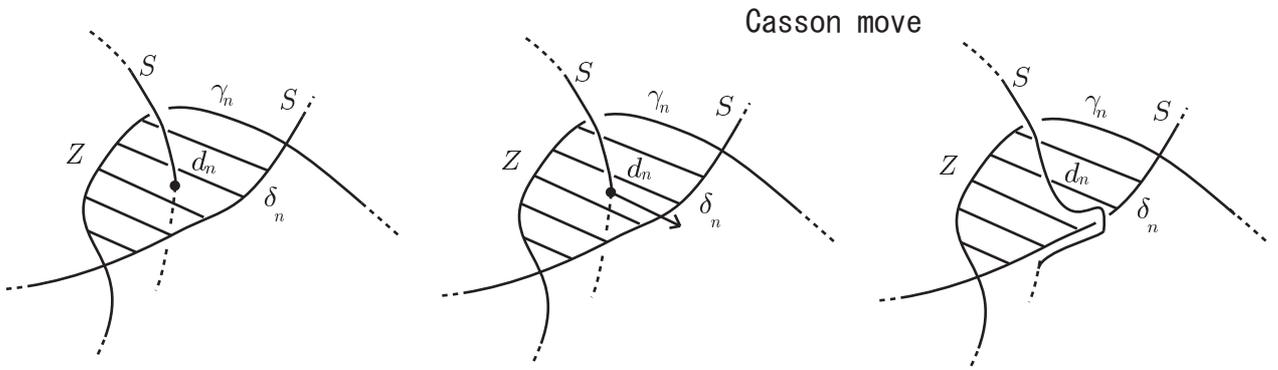


図 1: Casson move の概略図

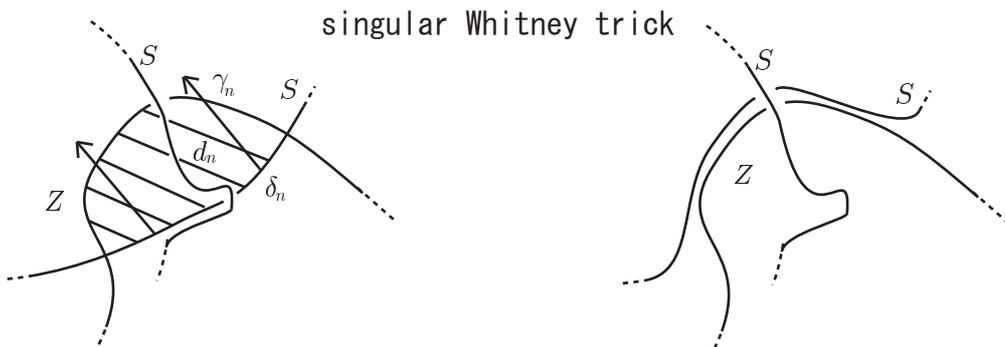


図 2: singular Whitney trick の概念図

定義 4.6 (standard family of curves) $(k, \partial^- k)$ を kinky handle (with n -kinks) とする。このとき、 $\partial^+ k$ 上のループの family $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ で以下の条件を満たす framed links を *standard family of kinky handle* という。

(条件) $c_i(\forall i)$ に与えられた framing に沿って normal 2-handle をつけると

$$(k, \partial^- k) \cup h_1^2, \dots \cup h_n^2 \cong (D^2 \times D^2, \partial D^2 \times D^2) \text{ (diffeo)}$$

となる。

定義 4.7 (standard framing) $(k, \partial^- k)$ を kinky handle とする。今 standard family of curves をとっておく。standard family の定義から $(k, \partial^- k) \cup h_1^2 \cup \dots \cup h_n^2$ は $D^2 \times D^2$ と diffeo だが、 ∂^+ -境界上の自明化に $D^2 \times D^2$ 上の core の自然な平行移動 ($D^2 \times 0 \sim D^2 \times \text{pt}$) から来るものがある。この自明化を $\partial^- k$ に引き戻したものを kinky handle の *standard framing* という。

この framing は次のような意味で “homological に” 自然な framing である。つまり、standard framing に沿って normal 2-handle h を取り付けて、 $k \cup h = \hat{k}$ とフタをしておく。このとき $H_2(\hat{k}) \cong \mathbb{Z}$ で、capped kinky handle core が生成元である。この交差形式は $\langle 0 \rangle$ である。

kinky handle は normal 2-handle $D^2 \times D^2$ をねじって得られるものなので normal 2-handle に自然に存在する平行移動を ∂^- -境界に制限しても kinky handle の attaching region $\partial^- k$ に framing が得られる。しかしこの framing は standard framing とは違うものである。その差は $\text{Self}(k) = (k \text{ の positive kink の数}) - (k \text{ の negative kink の数})$ として、 $2\text{Self}(k)$ だけ違う。

また Casson move をしても standard framing は変わらないことに注意しておく。

定義 4.8 (Tower construction) 3章までで定義した Casson tower の n -stage 目までの union を T_n とし、 n 段目までの tower の core を C_n とする。このとき、 $m < n$ となる任意の整数 m, n に対して $T_{m-n} := T_n - T_{m-1}$, $C_{m-n} := C_n - C_{m-1}$ と定義しておく。

補題 4.9 d を W 内の normally immersed disk (及び annulus) とする。今、 $\tau \hookrightarrow W$ を埋め込まれたトラスで、 $\tau \cap d$ は one point で $\pi_1(\tau) \rightarrow \pi_1(W)$ が 0-map であるとする。このとき、

$$d' \sim d \text{ (regular isotopy rel. } \partial)$$

が存在して、 d' は W で π_1 -neg. である。

証明 τ 上のループで π_1 を生成するものを α, β とする。 τ は S で π_1 に関して 0-map だったから、 α は W 内で immersed disk D を張る。この D と α を τ で平行移動したものを α' とする。 α' に張った D の近くの disk を D' とする。 τ を surgery して immersed sphere Z をつくる。このとき、 D と D' は d とある近傍で、2点で交わっている。その2点を x_i, y_i

とおく。そうすると、 $Z \cap d = \{x, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n\}$ となる。 x は τ と d との最初の one point に対応する。 Z を d の algebraic dual と見なしたい。実は x_i と y_i は Z で反対符号で交っており、図のように β と homotopic なループをこの交点をつなぐ c_i としてとれる。また、 β が null-homotopic であることから immersed disk を張る (図 3)。よって Z は d の algebraic dual になる。よって補題 4.5(π_1 -lemma) から d' が作れる。

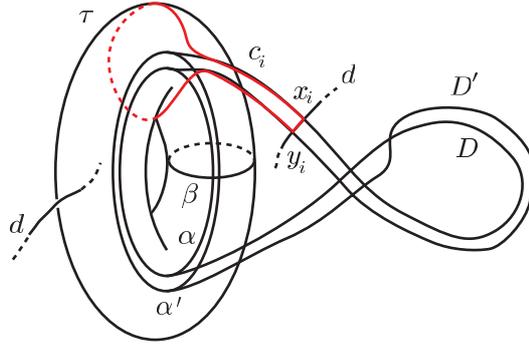


図 3: τ を D に沿って surgery して d に関する algebraic dual を作る。

補題 4.10 $1 \leq m < n$ とするとき、 $\pi_1(T_n - C_{1-m}) \cong Z \star F$ である。ここで、 Z は C_1 の core の meridian から生成される自由群であり、 F は T_n の standard family から生成される自由群である。

そして、

$$\pi_1(T_n - C_{1-m}) \rightarrow \pi_1(T_n - C_1)$$

は同型である。

この証明のために次の sublemma を示す。

サブ補題 4.11 (Back-up lemma) $N \subset \pi_1(T_m - C_{1-m})$ を T_m の standard family で normal generate された部分群とする。このとき、 $\pi_1(T_m - C_{1-m})/N$ は Z に同型である。ここで、 Z は C_1 の meridian によって normal generate された $\pi_1(T_m - C_{1-m})$ の部分群とする。

観察 4.12 $\partial W \supset T$ を solid torus とする。 T に kinky handle $(k, \partial^- k)$ を付けたものを Y とする。このとき、

$$\pi_1(Y) = [\pi_1(W)/N] \star \pi_1(k)$$

が成り立つ。ここで、 N は T の core によって normal generate される部分群とする。

証明 ファンカンペンの定理よりわかる。

ここでサブ補題 4.11 の証明をする。

証明 homotopy 同値により $T_m - C_{1-m} \sim \partial T_m - \text{int}(\text{attaching region}) =: M$ と定義する。 j -stage 目の kinky handle の 1-handle と 2-handle をそれぞれ $\{h_{j,1}^1, \dots, h_{j,n_j}^1\}$ と $\{h_{j,1}^2, \dots, h_{j,l_j}^2\}$ とする。また、それに対応する link を同じ記号で表す。 $h_{j,k}^1, h_{j,k}^2$ に対応する基本群の生成元を $r_{j,k}, s_{j,k}$ とする。 $\pi_1(M)$ の生成元はこれらと attaching circle の meridian である。

ここで、部分群 N で割るということは $\pi_1(M)$ の関係式に $r_{m,1} = r_{m,2} = \dots = r_{m,n_m} = e$ を挿入することである。

今、 $h_{m,k}^2$ の longitude に対して $\pi_1(M)$ の関係式が存在する。 $h_{m,k}^2$ に対応する $m-1$ -stage のある kink に対応する 1-handle $r_{m-1,*}$ が $r_{m,1}, r_{m,2}, \dots, r_{m,n_m}$ の共役で書き表せる。 $r_{m,1} = r_{m,2} = \dots = r_{m,n_m} = e$ であったから、 $r_{m-1,*} = e$ がわかる。よって同じことを $m-1$ -stage のすべての kink に対して行くと、 $r_{m-1,1} = r_{m-1,2} = \dots = r_{m-1,n_{m-1}} = e$ がわかる。

同じように $h_{m-1,k}^1$ の longitude は null-homotopic であることから $\pi_1(M)$ に関係式が存在する。これから $s_{m,*}$ が $r_{m-1,\dagger}$ の共役で書き表わされる。しかし、 $r_{m-1,\dagger}$ たちはすべて自明な元だったから、 $s_{m,*} = e$ となる。このようにすべての m -stage の handle に対して同じことをすれば、 $s_{m,1} = s_{m,2} = \dots = s_{m,l_m} = e$ が成り立つ。

これを繰り返すと $\pi_1(M)$ も生成元は attaching circle の meridian 以外すべて e になる。さらに attaching circle の meridian は他に関係式を持たない。

次に補題 4.10 の証明をする。

証明 まず、 $n = m+1$ のときを証明する。 $X_1 = T_m - C_{1-m}$ とする。 $(k_1, \partial^- k_1), \dots, (k_s, \partial^- k_s)$ を $m+1$ -stage とする。 $Y_1 = X_1 \cup (k_1, \partial^- k_1)$ とする。 $\pi_1(Y_1) = [\pi_1(X_1)/N_1] \star F_1$ である。ここで、 N_1 は $\partial^- k_1$ によって normally generate される部分群である。同じように $Y_2 = Y_1 \cup (k_2, \partial^- k_2)$ とすると、 $\pi_1(Y_2) = [\pi_1(X_1)/N_2] \star F_1 \star F_2$ となる。よって、

$$\pi_1(Y_n) = [\pi_1(X_1)/N_n] \star F_1 \star F_2 \star \dots \star F_n$$

が成り立つ。

同じようにして $n = m+k$ のときも成り立つ。ゆえに $\pi_1(T_n - C_{1-m}) \cong Z \star F$ という自由群になる。これは右辺は m の情報は反映されていない。特に $m=1$ としても同型である。よって後半部分の主張は正しい。

命題 4.13 $(k, \partial^- k)$ をキャットソントワー T_n の j -stage 目の kinky handle とする。ただし、 $2 \leq j \leq n$ とする。ここで、 $\tau \subset \partial^+ k$ を k の distinguished torus とする。もし、 $m < n$ であれば、 $\tau_1(\tau) \rightarrow \pi_1(T_n - C_{1-m})$ は 0-map である。

ここで distinguished torus とは、kink の周りにある link であって、もとの 2-handle の meridian を非自明な生成として持つトーラスのことである (図 4)。

証明 $\pi_1(\tau) \ni \alpha, \beta$ をトーラスの 2 つの generator とする。これは k の meridian であるから補題 4.10 により $\pi_1(T_n - C_{1-m})$ の元として自明になる。

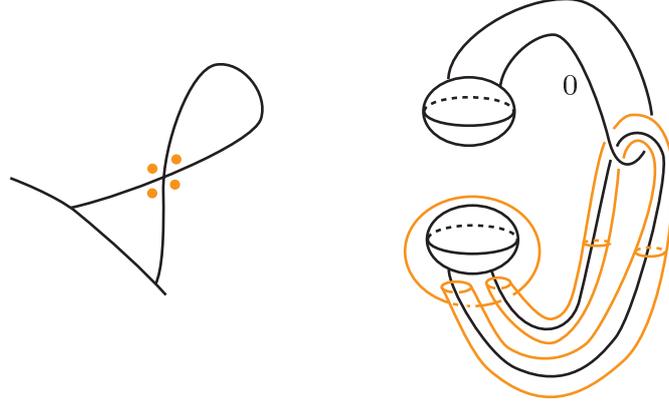


図 4: 左の 4 つの丸、及び右の左下に埋め込まれた torus が distinguished torus である。

定理 4.14 (3-stage (Little) reimbedding theorem) $\forall T_3^0$ に対して $T_3^1 \subset T_3^0$ が存在して、以下の条件を満たす。

- (a) $C_{1-2}^0 = C_{1-2}^1$
- (b) 自然な埋め込みが同型 $\pi_1(T_3^0 - T_3^1) \rightarrow \pi_1(T_3^0 - C_1^0)$ を誘導する。

証明 $(k_1, \partial^- k_1), \dots, (k_n, \partial^- k_n)$ を 3-stage 目の kinky handle とする。 τ_i を k_i に対応する 2-stage の kink に対応する distinguished torus とする。 \bar{d}_i を k_i の core とそれに付随する T_2 内の annulus とする。今、 $\pi_1(\tau_i) \rightarrow \pi_1(T_3^0 - C_{1-2}^0)$ が 0-map であるから、 $W := T_3^0 - N(C_{1-2}^2)$ で、 $d := \bar{d}_1 \cap W$ 、 $\tau := \tau_1$ とすると、補題 4.9 からある normal immersion d' が存在して、 W 上で π_1 -neg. になる。 \tilde{d}_1 を $d' \cup (\bar{d}_1 - W)$ と定義する。このとき、 \tilde{d}_1 は他の \tilde{d}_i とは交わっていない。

これは次の二点において確かめられる。第一に、Casson move はある arc の近傍に沿って動かしているので 4 次元の general position の議論から勝手な 2-complex とは交わらないように操作できるからである。第二に、 x_1 と y_1 に関する β にホモトピックな circle は他の \bar{d}_i と交わらないようにとれる。これは β は k の meridian の一つであって一点に縮む homotopy は k_1 の近傍で十分だからである。このことから singular Whitney disk は \bar{d}_i と交わらないようにとれる。もう一度 $\tilde{d}_1 = \bar{d}_1 \cup (d_1 - W)$ と定義し直せば \tilde{d}_1 は W において π_1 -neg. である。

次に、 $W = T^0 - \overset{\circ}{N}(C_{1-2}) - \tilde{d}_1$ とおき、 $d = \bar{d}_2 \cap W$ とし、 $\tau = \tau_2$ として同じ議論をする。このように繰り返していくと、 $T_0 - \overset{\circ}{N}(C_{1-2}^0)$ の中にお互い disjoint な normal immersion $\tilde{d}_1 \cup \tilde{d}_2 \cup \dots \cup \tilde{d}_n$ を構成することができる。

ここで、 $T_3^1 := \text{reg.nbd}(C_{1-2}^0 \cup \tilde{d}_1 \cup \tilde{d}_2 \cup \dots \cup \tilde{d}_n)$ を T_3^0 の中に埋めこめばよい。

定理 4.15 (4-stage(Middle) embdding theorem) 4-stage tower $\forall T_4^0$ に対して、 $\exists T_4^1$ が存在して、次が成り立つ。

- (a) $C_{1-2}^0 = C_{1-2}^1$
- (b) $\pi_1(T_4^0 - T_4^1) \rightarrow \pi_1(T_4^0 - C_1^0)$ は同型である。
- (c) $\pi_1(T_{2-4}^1) \rightarrow \pi_1(T_4^0 - C_1^0)$ の像は包含写像の誘導する写像 $\pi_1(T_{2-4}^0) \rightarrow \pi_1(T_4^0 - C_1^0)$ の像に含まれる。つまり基本群の F -part に移される。

証明 little reimbedding を T_{2-4}^0 に対して用いる。それを T_{2-4}^1 として、 $T_1^0 \cup T_{2-4}^1$ を T_4^1 として定義する。よって

$$\pi_1(T_4^0 - T_4^1) \rightarrow \pi_1(T^0 - C_{1-2})$$

が同型である。今、 α_2 を $\pi_1(T_4^0 - C_{1-2}^0)$ の元で C_2^0 の meridian の一つだとする。 α_2 はある 2-stage kinky handle 付随する (もしくは 1-stage のある kink に対応する) distinguished torus に埋め込まれるある circle にホモトピックである。よって、そのトーラスの生成元を用いて $\alpha_2 = [\alpha_1, \gamma\alpha_1\gamma^{-1}]$ と書き表わされる。ここで α_1 は γ は $T_1^1 \cap T_{2-4}^1$ のある circle である。 γ は T_2 の生成元に homotopic であるから、 $\pi_1(T_{2-4}^0 - C_{2-3}^0)$ の中では e に等しい。よって $\alpha_2 = [\alpha_1, \alpha_1] = e$ が成り立つ。ゆえに $\pi_1(T_4^0 - C_{1-2}) \cong \pi_1(T_4^0 - C_1)$ となる同型が成り立つ。

事実 4.16 (Gompf-Singh の Improvement) 事実として Little reimbedding theorem と Middle reimbedding threorem は同じ 3-stage reimbedding として実現できる。つまり、以下の事実が成り立つ。

little reimbedding theorem の T_3^1 は以下の生成を満たすようにとれる。 $\text{Im}(\pi_1(C_3^1) \rightarrow \pi_1(T_3^0 - C_1^0))$ は $\text{Im}(\pi(C_3^0) \rightarrow \pi_1(T_3^0 - C_1^0))$ (つまり F -part) の中に含まれる。

この証明はここでは skip するが、実はこれが Gompf-Singh の論文で一番メインとなる部分でもあり、彼らは大変こだわった書き方をしている。しかし、ここでその解説をしようとは大幅な寄り道のため、読者が疲れ切ってしまう危険性がある。ここでは割愛せざるを得ないことを許していただきたい。またの機会に残しておきたい。ただ、単なる 4 次元多様体論としてもとても面白く読めるところでもあるので興味がある方には是非一読していただきたい。

次なる目標はこの定理の証明である。

定理 4.17 (Big reimbedding theorem) 4-stage tower $\forall T_4^0$ に対して、 $\exists T_4^1$ が存在して、以下を満たす。

- (a) $C_{1-2}^0 = C_{1-2}^1$
- (b) $\pi_1(T_4^0 - T_4^1) \rightarrow \pi_1(T_4^0 - C_1^0)$ は同型である。
- (c) $\pi_1(T_4^1) \rightarrow \pi_1(T_4^0)$ は 0-map である。

そのために次の定義をする。

定義 4.18 τ_1, \dots, τ_k を T_n の top の distinguished torus とする。 $\{c_1, \dots, c_k\}$ を $\partial^+ T_n$ 上の *triangular family* とは次の条件を満たす framed circle のことである。

- (a) c_i はみな τ_j と transverse である。
- (b) $\forall j(1 \leq j \leq k)$ に関して $c_j \cap \tau_j$ は one point である。
- (c) $i < j$ であれば $c_i \cap \tau_j = \emptyset$ である。

つまり τ_i と c_j の交差関係を行列にすると

$$\begin{pmatrix} 1 & \star & \star & \star \\ 0 & 1 & \star & \star \\ 0 & 0 & 1 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のような上三角行列になる。

補題 4.19 (Capping lemma) n -stage キャットソントワー T_n がある 4次元多様体 M に埋め込まれているとする。 C_n を T_n の core としてその meridian は $\pi_1(M - \overset{\circ}{N}(T_n))$ の中で trivial とする。 $\{c_i\}$ が T_n 中の *triangular family* の sub-family とする。 $\{c_i\}$ が $\pi_1(M - \overset{\circ}{T}_n)$ の中で trivial とする。このとき、あるお互い disjoint な normal immersion disk $\{\tilde{d}_i\}$ が $M - \overset{\circ}{N}(T_n)$ の中に存在して次を満たす。

- (a) $\partial \tilde{d}_i = c_i$
- (b) $\{\partial \tilde{d}_i\}$ は $M - T_n$ の中で π_1 -neg.

証明 d_1 は $M - \overset{\circ}{T}_n$ の中の normally immersed disk とする。定義から $d_1 \cap \tau_1 = \text{one point}$ である。 $\pi_1(\tau_1) \supset \text{meridian of } C_n$ が trivial であるから、補題 4.9 より、 $d \sim \tilde{d}'$ が存在して $M - \overset{\circ}{T}_n$ の中で π_1 -neg. である。 $W = (M - T_n) - \tilde{d}_1$ として、 c_2 に対する disk を $d = d_2$ として、 $\tau = \tau_2$ として、補題 4.9 を適用することで、 W の中で π_1 -neg. な \tilde{d}_2 を作ることができる。このようにして、 $M - \overset{\circ}{T}_n$ の中で π_1 -neg. な disk $\tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_n$ が存在する。

補題 4.20 (Annulus lemma) 4次元多様体 M の中にキャットソントワー T_n を作ったとする。さらに、 C_n の任意の meridian が $\pi_1(M - \overset{\circ}{T}_n)$ の中で null-homotopic とする。 $\{a_i\}$ は pairwise disjoint normally immersed annuli の family であり、 $\partial^- a_i$ (片方の境界) は $\partial^+ T_n$ の *triangular family* の sub-family であり $\partial^+ a_i$ (もう片方の境界) は ∂M に属するとする。このとき、ある pairwise disjoint normally immersed annuli $\{\tilde{a}_i\}$ が存在して、以下を満たす。

(a) \tilde{a}_i は a_i を Casson move して得られる。

(b) $\{\tilde{a}_i\}$ は $M - \overset{\circ}{T}_n$ で π_1 -neg. である。

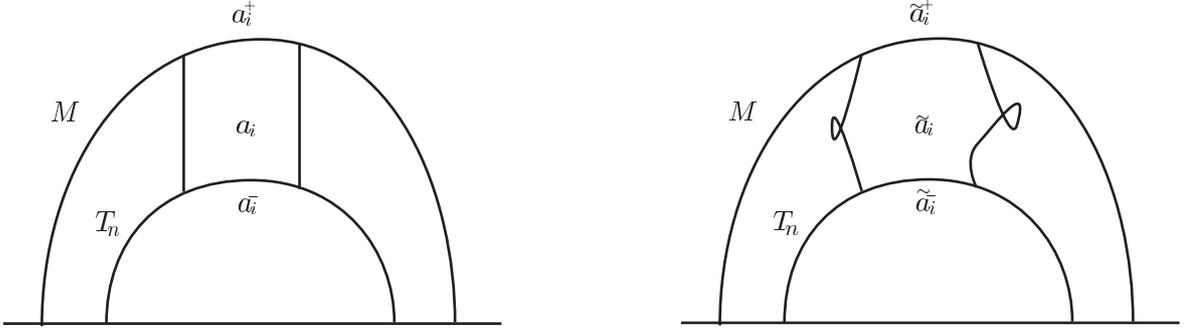


図 5: Annulus lemma

証明 τ_i を $\partial^- a_i$ の distinguished torus とする。 $\pi_1(\tau_i) \rightarrow \pi_1(M - \overset{\circ}{T}_n)$ は 0-map なので $\pi_1(\tau_i)$ の standard generator は trivial である。よって補題 4.9 から \tilde{a}_i の Casson move から \tilde{a}_i が作れる (図 5)。このとき、他の \tilde{a}_j とは交わらないようにつくれる。(なぜなら、Casson move はある arc に沿った regular isotopy なので勝手な 2-complex とは交わらないようにつくれる。)

補題 4.21 (Tower extension lemma) M を spin 多様体とする。

$\partial_n T_n := \partial^+(\text{top stage of } T_n)$ とおく。 $\pi_1(\partial^+ T_n) \rightarrow \pi_1(M - \overset{\circ}{T}_n)$ が 0-map であるとする。このとき、 T_n に standard family $\{c_i\}$ が存在して以下を満たす。 $\partial \tilde{d}_i$ が c_i と一致するような pairwise disjoint normally immersed disk $\{\tilde{d}_i\}$ が存在して、 $\forall i$ に対して、 $(k_i, \partial^- k_i)$ を \tilde{d}_i の正則近傍で $\partial^- k_i$ の standard framing が c_i の framing と一致する。つまり M の中に n -stage を拡張できる。

証明 M の spin structure をひとつ固定しておく。いま、 $W = M - \overset{\circ}{T}_n$ とおく。 $\{c_i\}$ をこの spin structure の framing と同じ自明化をもつ framing をもつ standard family とする。いま、 $\pi_1(\tau) \rightarrow \pi_1(M - \overset{\circ}{T}_n)$ を 0-map なので $\pi_1(\partial_n T_n) \rightarrow \pi_1(M - \overset{\circ}{T}_n)$ は 0-map である。補題 4.19 から、ある disk d_i が存在する。その正則近傍を $(k_i, \partial^- k_i)$ とおく。

しかし d_i は要求された disk ではないかもしれない。というのも一般に framing がずれており n -stage tower にならないかもしれない。各 tower の framing は 0-framing でなければならぬことを思いだそう。 d_i を修正して \tilde{d}_i を作る。

いま、 k_i の standard framing と c_i に元々導入されていた framing が m だけずれているとする。今、 $\hat{W} = W \cup 2\text{-handle}$ とおく。いま、 2-handle の貼り付けは c_i の framing に沿うものとする。このとき、 $\alpha \subset \hat{W}$ を immersed S^2 とする。 α は k_i と 2-handle の core を貼り付けたものである。このとき、 $[\alpha]^2 = m$ である。 \hat{W} も spin 構造をもつことことから

$m = 2\ell$ である。今 τ_i を k_i に対する distinguished torus とする。このとき、 $[\tau_i] \in H_2(\hat{W})$ であり、 $[\tau_i] \cdot [\tau_i] = 0$ かつ $[\tau_i] \cdot [\alpha] = 1$ である。また $\pi_1(\tau_i) \rightarrow \pi_1(W)$ が 0-map であるから τ_i を surgery して immersed S^2 としたものを s とする。いま、 d_i に s を適切に連結和をする。

つまり、 $\ell > 0$ ならば d_i 向きを逆にした s の connected sum を $|\ell|$ 回行う。 $\ell < 0$ ならば d_i に (向きが一致するように) s の connected sum を $|\ell|$ 回行う。このとき新しくできた immersed disk を \tilde{d}_i とする。

このとき、framing のずれを調べると、 ℓ の正負に関わらず $\beta = [\alpha] - \ell[\tau_i]$ の交点数を調べればよい。($\cdot : [\tau_i] = [s]$)

$$\beta^2 = ([\alpha] - \ell[\tau_i])^2 = [\alpha]^2 - 2\ell[\alpha] \cdot [\tau_i] + \ell^2[\tau_i]^2 = m - 2\ell = 0$$

よって c_i と \tilde{d}_i の正則近傍の standard framing が一致する。

定理 4.17 の証明

1st step (Improved 3-stage reimbedding theorem の適用すること)

k_1^4, \dots, k_m^4 を 4-stage 目の kinky handle とする。つまり $T_3^0 \cup_i k_i^4 = T_4^0$ である。今、 k_i^4 の kink の数を n_i とする。 $n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$ として、今各 step を事実 4.16 (Improved 3-stage reimbedding theorem) を適用して

$$T_3^n \hookrightarrow T_3^{n-1} \hookrightarrow T_3^{n-2} \dots \hookrightarrow T_3^0$$

を構成する。 $R^j = T_3^{j-1} - T_3^j$ とする。

2nd step (R^1 上の immersed annulus を構成すること)

α_i^1 ($1 \leq i \leq n$) をつくる。 $\partial^- k_i^4$ の attaching curve を retraction $T_3^0 \rightarrow C_{1-3}^0$ にそって trace してやると、 R^1 の中に imbedding annulus α_i^1 ができる。

ここで事実 4.16 を使って attaching するところがずれている気がするが、事実 4.16 では新しい kinky handle の core はある arc の近傍しか変化しない少し修正すれば k_i の attaching circle と T_3^1 上の対応する standard family を annulus でつなぐことができる。これが α_i^1 である。

明らかに α_i^1 は pairwise disjoint であるので補題 4.20 を適用すれば Casson move をして pairwise disjoint immersed annuli a_i^1 が存在して R^1 の中で π_1 -neg. になる。rel. ∂ から $\partial^+ a_i^1 = \partial^+ \alpha_i^1$, $\partial^- a_i^1 = \partial^- \alpha_i^1$ である。

3rd step (R^1 上の immersed disk)

T_1 上の任意のループは F -part に属する。これは Gompf-Singh の Improved 3-stage reimbedding theorem で追加されている条件から。(もしくは Middle reimbedding theorem の条件 (c))

今 $m_0 = m$ とおく。今、 T_3^1 の standard family は

$$\{\partial a_i^1 = c_i^1; 1 \leq i \leq m_0\} \cup \{\bar{c}_j^1; m_0 < j \leq m_1\}$$

だけある。後半の family は reimbedding theorem 適用で増えた kinks に対する standard family である。よって $m_1 - m_0$ は Casson move の数の 2 倍に相当する。(∵ Casson move により 2 重点 (kink) が 2 つ現れる。)

ここで問題は \bar{c}_i^1 が T_3^0 の中で null-homotopic になるとは限らないことである。そのためにある修正をする。

そこでもし修正して正しい c_j ($j = 1, 2, \dots, m_1$) ができたとする。すると、ある pairwise disjoint immersed disks d_j^1 ($j = m_0 + 1, 2, \dots, m_1$) が R_1 の中で存在して補題 4.19 (Capping lemma) により d_i^1 が R^1 のなかで π_1 -neg. となるようにできる。

4th step (triangular family の構成)

c_j^1, \bar{c}_j^1 を前の step と同じものとする。今、

$$\varphi : \pi_1(T_3^1) \rightarrow \pi_1(T_3^0) \cong F \text{ (free group)}$$

を包含写像から基本群に誘導される写像とする。構成から F は $\varphi(c_i)$ ($1 \leq i \leq m_0$) で生成される。 x を \bar{c}_j^1 ($m_0 < j \leq m_1$) とすると $\varphi(x)$ は $\varphi(c_1), \dots, \varphi(c_{m_0})$ のある word でかけるはずである。それを $W(\varphi(c_1), \dots, \varphi(c_{m_0}))$ とかく。今、 $y = x[W(c_1, \dots, c_{m_0})]^{-1}$ とすると、 $\varphi(y) = e \in F$ が成り立つ。ここで、 c_j^1 をこの word に沿って $\partial^+ T_3^1$ に curve を埋め込む。そのとき、構成からこの c_j^1 は T_3^1 の standard family ではないが triangular family にはなっている。よって c_i^1 ($1 \leq i \leq m_1$) は T_3^1 の triangular family である。

5th step (R^2 上の immersed annuli の構成)

a_i^2 ($i = 1, 2, \dots, m_1$) を R^2 の pairwise disjoint normally immersed annuli を同じようにつくる。

6th step (R^2 上の immersed disks の構成)

前の step から $c_i^2 = \partial^- a_i^2$ ($1 \leq i \leq m_1$) を T_3^2 の standard family とする。4th step から T_3^2 に triangular family $\{c_i^2$ ($1 \leq i \leq m_2$) $\}$ を T_n の standard family

$$\{c_i^2; 1 \leq i \leq m_1\} \cup \{\bar{c}_j^2; m_1 < j \leq m_2\}$$

から同じように構成できる。

よって補題 4.19 から d_j^2 ($m_1 < j \leq m_2$) が存在して、pairwise disjoint で π_1 -neg. となる。ここで、 d_j^2 は a_j^2 と交わらない。

7th step (R^k 上の immersed annuli and disks の構成)

$$R^k \supset \{a_i^k; 1 \leq i \leq m_{k-1}\}, \{d_j^k; m_{k-1} < j \leq m_k\}$$

を構成し、この annuli と disks は pairwise disjoint immersed であり、 R^k 上で π_1 -neg. である。

また、 $\{c_i^{k-1} = \partial^- a_i^k; 1 \leq i \leq m_{k-1}\}$ は T_3^{k-1} で triangulated family である。

8th step (T_4^0 上の immersed disks の族)

d_i^0 を k_i の core とし、 $1 \leq \forall i \leq m$ として $\delta_i = d_i^0 \cup a_i^1 \cup a_i^2 \cup \dots \cup a_i^n$ とおく。次に

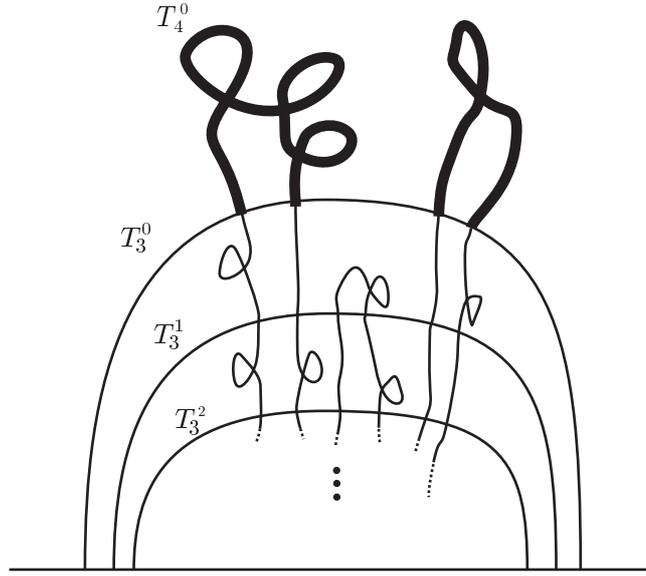


図 6: δ_i の埋め込み

$1 \leq \forall k \leq n$ に対して $m_{k-1} < i \leq m_k$ となる i に対して δ_i を $d_i^k \cup a_i^{k+1} \cup \dots \cup a_i^n$ して $T_4^0 - \text{int}(T_3^n)$ とおく (図 6)

9th step (特異 Norman トリック)

δ_i ($i = 1, \dots, m_0$) に対して各 $1 \leq j \leq n_1$ に対して a_1^i の geometric dual を $\text{Int}(R^i)$ の中にとることができる。 ($\because R^i$ 中の a_j^1 の π_1 -neg. より。) よってそれを S_1^j とする。さらに S_1^j はほかの annuli とは一切交わらない。同じように $n_1 < j \leq n_1 + n_2$ となる j に対して S_2^j を R^j 上にとることができ、 S_2^j はほかの annuli とは一切交わらない。

このようにすべての $1 \leq j \leq n$ に対して algebraic dual が存在する。またそれぞれ層が違うことから algebraic dual 同士は交わらない。

今この immersed spheres に T_4^0 上の特異 Norman トリック (図 7) を施す。そうすると k_i^4 上の kink は外れて新しい kink はすべて T_3^0 以下に収まる。

$1 \leq \forall i \leq m$ に対して Δ_i を δ_i を特異 Norman トリックを施したものとする。

10th step (Phony タワー)

V_4 を T_3^n と $\Delta_1, \dots, \Delta_m, \delta_{m_0+1}, \dots, \delta_{m_n}$ の和集合の正則近傍とする。

まず包含写像が基本群に誘導する写像 $\pi_1(V_4) \rightarrow \pi_1(T_4^0)$ は自明である。これは前の step で言及したように top の kink はすべて T_3^n 以下に収まっていることからわかる。

しかしここで問題なのは V_4 はキャッソントワーでないのでこのまま $V_4 = T_4^1$ とはできない。その理由は V_4 の最後に付けた stage は standard family ではなく triangular family に貼りついているからである。(それをここでは Phony タワーと呼んでいるようである。)

11th step (タワー T_4^1 の構成)

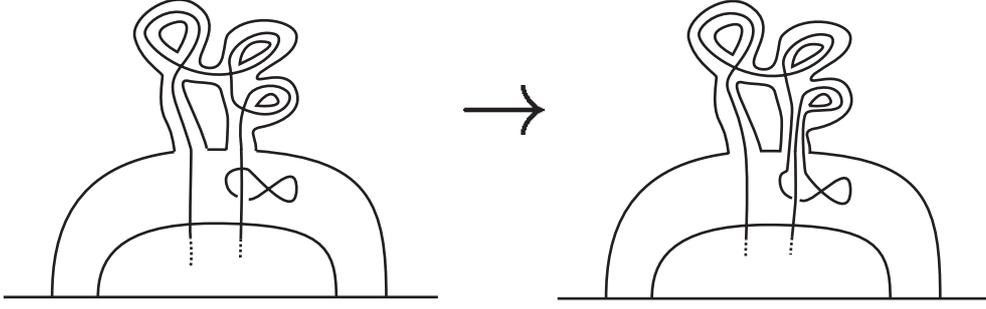


図 7: 特異 Norman trick

前の step の最後に書いた問題を解決する為に今一度 Improved 3-stage reimbedding theorem を適用して $T_3^{n+1} \hookrightarrow T_3^n$ を構成する。すると、Improvement で示したように $\pi_1(T_3^{n+1})$ の生成元は $\pi_1(T_3^n - T_3^{n+1}) \cong Z \star F$ の F -part に写される。よって $\pi_1(T_3^n - T_3^{n+1}) \rightarrow \pi_1(V_4 - T_3^{n+1})$ の F の像は自明である。また $\pi_1(\partial^+ T_3^{n+1}) \rightarrow \pi_1(T_3^n - \text{int}(T_3^{n+1})) \rightarrow \pi_1(V_4 - \text{int}(T_3^{n+1}))$ は 0-map であるので補題 4.21 (Tower extension lemma) を使って V_4 の中に 4-stage 目の tower を作ることができる。この tower を合わせて T_4^1 とおく。このとき、

$$\pi_1(T_4^1) \rightarrow \pi_1(T_4^0) \cdots (*)$$

は $\pi_1(V_4)$ を経由し、 $\pi_1(V_4) \rightarrow \pi_1(T_4^0)$ が 0-map であることから (*) は 0-map であることがわかる。

ここで $\pi_1(T_4^0 - T_4^1) \rightarrow \pi_1(T_4^0 - C_1^0)$ は同型である。 ($\because T_4^1$ は $V_4 - C_1^0$ で π_1 -neg であり、

$$\pi_1(V_4 - T_4^1) \xrightarrow{\cong} \pi_1(V_4 - T_3^{n+1}) \xrightarrow{\cong} \pi_1(V_4 - C_1)$$

が成り立つ。最初の同型は Tower extension lemma の主張から。2 番目の同型は 3-stage reimbedding theorem から。)

定理 4.22 (6-stage reimbedding theorem) 任意の 6-stage tower T_6^0 に、ある 7-stage tower T_7^1 が埋め込まれ、以下を満たす。

- (a) $C_{1-3}^0 = C_{1-3}^1$
- (b) $\pi_1(T_6^0 - T_6^1) \rightarrow \pi_1(T_6^0 - C_1^0)$ は同型である。

証明 T_{2-6}^0 に対して定理 4.17 (Big reimbedding theorem) を用いると新しい 6-stage tower $T_6^1 := T_1^0 \cup T_{2-6}^1$ が完成する。(Freedman 流に進めているので定理 4.17 で書いた主張とは tower がひとつ多くなっていることに注意。) 今、

$$\varphi : \pi_1(\partial^+ T_6^1) \rightarrow \pi_1(T_6^0 - \text{int}(T_6^1)) \cong \pi_1(T_6^0 - C_{1-2}^0) \cong \pi_1(T_6^0 - C_1^0) \cong Z \star F$$

とみると、 $\text{Im}(\varphi) \subset F$ が成り立つ。というのも $T_6^1 \hookrightarrow T_{2-6}^0$ の写像は 1st stage と link しないからである。Big reimbedding theorem の (c) から $\text{Im}(\varphi) = \{e\}$ となる。よって補題 4.21(Tower extension lemma) により T_6^0 の中に 7-stage 目を作ることができる。

定理 4.23 (Mitosis theorem) 任意の 6-stage tower T_6^0 に対してある 13-stage tower T_{13}^* が存在して

(a) $C_{1-3}^0 = C_{1-3}^*$

(b) $\pi_1(T_6^0 - T_{13}^*) \rightarrow \pi_1(T_6^0 - C_{1-3}^0)$ は同型である。

証明 定理 4.22 により、 $\exists T_7^1 \subset T_6^0$ となり、さらに $\exists T_{2-8}^2 \subset T_{2-7}^1$ が成り立ち、 $T_8^2 = T_1^1 \cup T_{2-8}^2$ と定義する。このように繰り返すことで、 $\exists T_{3-9}^3 \subset T_{3-8}^2$ から $T_9^3 = T_1^1 \cup T_{2-2}^2 \cup T_{3-9}^3$
 $\exists T_{4-10}^4 \subset T_{4-9}^3$ から $T_{10}^4 = T_1^1 \cup T_{2-2}^2 \cup T_{3-3}^3 \cup T_{4-10}^4$
 \dots

$\exists T_{7-13}^7 \subset T_{7-12}^6$ から $T_{13}^7 = T_1^1 \cup T_{2-2}^2 \cup T_{3-3}^3 \cup T_{4-4}^4 \cup T_{5-5}^5 \cup T_{6-6}^6 \cup T_{7-13}^7 =: T_{13}^*$
とすると条件を満たすものができる。

(a) は明らか。(b) は定理 4.22 からわかる。

この定理から任意の 6-stage tower に対していくらでも高い Casson tower を埋め込むこともできる。この説明は次章にまかせる。

6-stage reimbedding theorem は Gompf-Singh の論文では 5-stage reimbedding theorem として refinement される定理である。しかしここでは Freedman に敬意を表して 6-stage reimbedding をこれ以降使い続けることにする。6-stage reimbedding の代わりに 5-stage reimbedding を使っても証明がやさしくなるとか Freedman の主張が変わったりすることは今のところないからである。6 を 5 にする制約が位相幾何学的に（おそらく微分位相幾何学的に）どのような意味をもつかということは相当深い問題であり、これから検討すべき問題の一つ考えられうる。

また、Gompf-Singh が論文の最後に挙げた応用（topological slice など）も今となつては（本研究会の田中利史の講演で説明されたように）もっと一般的な主張を別の観点から証明されるに至っているため 5-stage reimbedding theorem の本質的な応用はまだ見出されていないと思われる。

5 Geometric control and the imbedding of design \mathcal{D} in CH

次にこの章ではキャッソンハンドルのあるコンパクト化とその埋め込みについて議論する。さらにその埋め込みを用いて通常の 2-handle の中にあるコントロール集合で parametrize されたコンパクト化した境界に現れるものを同時に埋め込んだもの（design \mathcal{D} ）を定義してこの章を終える。また、Freedman も言及したようにコンパクト化の意味が曖昧にな

るのでここでの CH のコンパクト化を安易に \overline{CH} とは書かない。ひとまず次の定理の証明を目標にする。

定理 5.1 任意の 6-stage tower $(T_6, \partial^- T_6)$ に対してある S-B handle K が存在して

$$(K, \partial^- K) \hookrightarrow (T_6, \partial^- T_6)$$

が存在する。ただし $\partial^- K = T_6$ であり、 $(K - Fr^+(K), \partial^- K)$ 上では smooth である。また K の first 4-stage は K のそれと一致する

S-B handle (Shapiro-Bing handle) とは CH を Shapiro-Bing コンパクト化したものである。ここでいくつか概念と記号を用意する。

±-labeled tree ある base point (一点) をもつ tree で各 edge に ± の符号をもつものを ±-labeled tree という (図 8)。ただし base point から伸びる edge は one component のみで各 vertex を端点にもつ edge は有限個とする。±-labeled tree とキャッソントワーは次のように 1 対 1 対応がある。タワーの各 stage を vertex (base point は 1-stage) として、edge を kink とし、edge にのる ± は kink の符号に対応させればよい。 $Q \in \{\pm\text{-labeled tree}\}$ に対してこの対応から CH_Q と書く。ここで $D^2 \times \partial D^2$ の中に torus の入れ子を定義す

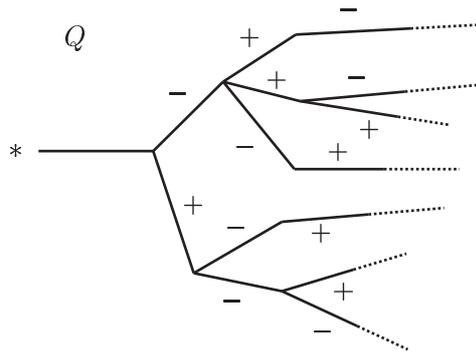


図 8: ±-labeled tree

る (図 9)。 $D^2 \times \partial D^2$ の中に図の様に Whitehead link の形に solid torus をいくつか入れる。この各 solid torus 達に linking number 0 として framing をいれておかなければならない。この solid torus の union を X_1 とする。さらに X_1 の各成分に同じように torus の入れ子を (framing 付きで) 同じように埋め込む。それを X_2 とおく。このようにして torus の入れ子を無限個

$$D^2 \times \partial D^2 \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_k \supset \cdots$$

のように構成する。また X_k の各成分を境界にして $D^2 \times D^2$ の中の 2-handle を

$$D^2 \times D^2 \supset W_1 \supset W_2 \supset \cdots \supset W_k \supset \cdots$$

のように入れ子にして張る。このような入れ子に対しても \pm -labeled tree からの 1 対 1 対応がある。(clasp の符号を \pm に対応させればよい。)

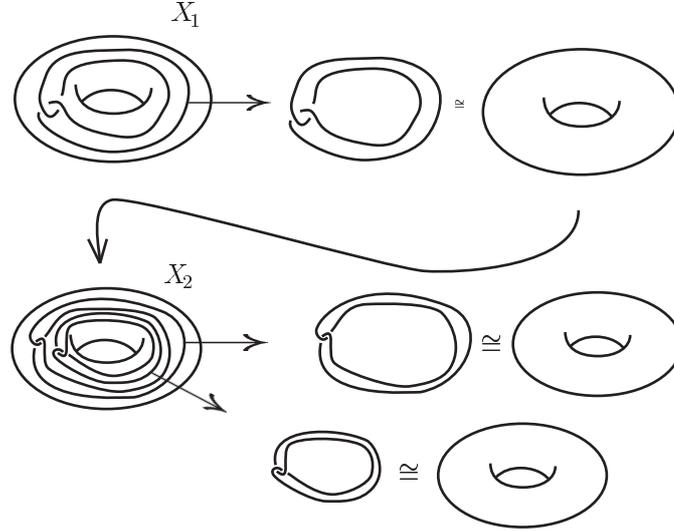


図 9: solid torus の入れ子

$$\begin{aligned} \bigcap_{k \geq 1} X_k &=: Wh_Q^*, & Wh_Q &: Wh_Q^* \text{の成分の集合} \\ \bigcap_{k \geq 1} W_k &=: \overline{Wh}_Q^*, & \overline{Wh}_Q &: \overline{Wh}_Q^* \text{の成分の集合} \end{aligned}$$

よって \overline{Wh}_Q^* は $Wh_Q^* \rightarrow \text{End}(Q)$ による mapping cylinder と思える。

今、 U_Q を $D^2 \times D^2 - \{(D^2 \times \partial D^2) \cup \overline{Wh}_Q^*\}$ と定義する。また U_Q の (S-B) コンパクト化を

$$K_Q = (D^2 \times D^2 / \overline{Wh}_Q, \partial D^2 \times D^2)$$

とおく。この割り算記号は通常の分解空間の定義に基づく。次にこの定理を用意しなければならない。

定理 5.2 (Theorem 2.2 in Freedman's paper) Q を \pm -labeled tree とする。

$$U_Q \cong CH_Q \quad (\text{diffeomorphic})$$

証明 図 10 のような Kirby calculus より。

この同一視によって CH_Q のコンパクト化を K_Q とする。定理 5.1 の証明のためには K_Q を T_6 の中に埋め込まなければならない。

1-handle slidings
& 1-2 handle canceling

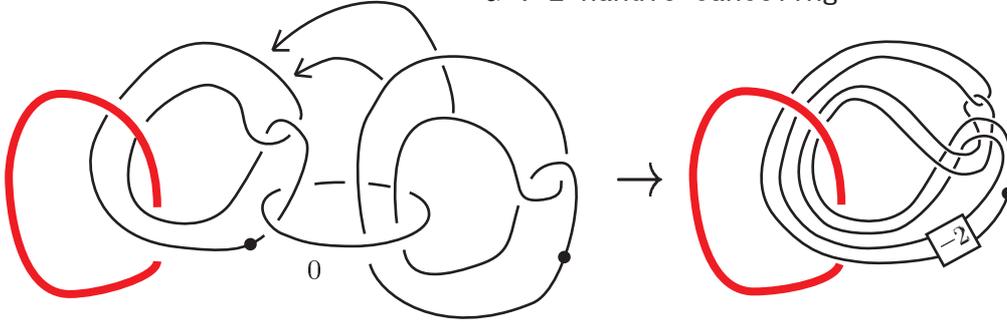


図 10: 2-stage の Kirby diagram

定理 5.3 (The former of Theorem 5.3 in Freedman’s paper) Q を \pm -labeled tree とする。このとき

$$Fr^+(K_Q) = D^2 \times \partial D^2 / Wh_Q$$

証明 定義から

$$\begin{aligned} Fr^+(K_Q) &= Fr^+(D^2 \times D^2 / \overline{Wh}_Q) = \partial^+(D^2 \times D^2) / \{\overline{Wh}_Q \cap \partial^+(D^2 \times D^2)\} \\ &= D^2 \times \partial D^2 / Wh_Q \end{aligned}$$

ここで定理 5.1 を証明する。

証明 前章の定理 4.23(Mitosis theorem) から任意の 6-stage tower T_6^0 に対してある 12-stage tower T_{12}^1 を埋め込むことができる。このとき、上半分の 6-stage tower T_{7-12}^1 を任意に小さくすることができる。というのも“余分”の 13-stage 目を π_1 -neg. としてつけることから T_{7-12}^1 は null-homotopic にすることができるからである。結果として T_{7-12}^1 の成分をある ϵ -ball の集合におさめることができる。それを β_1 とかく。(このとき、この ϵ 近傍を T_{6-6}^1 の周辺を含むような形でうまくとらなければならないことは確かであるが複雑になるのでその詳細な記述はここでは避ける。) 次に、Mitosis theorem をさらに用いて T_{7-12}^1 の中に新しい 12-stage tower T_{7-18}^2 を上記のように構成することができる。ここでも T_{13-18}^2 の各成分を $\frac{\epsilon}{2}$ -ball の集合 β_2 の中に収めることができる。このように帰納的に $T_{6k+1-6(k+1)}^k$ の中に 12-stage tower $T_{6k+1-6(k+2)}^{k+1}$ を $\frac{\epsilon}{k+1}$ -ball の集合 β_{k+1} の中に構成できる。

このようにして

$$Y := \cup_{k \geq 1} T_{6(k-1)+1-6k}^k$$

とおく。ここで \bar{Y} は S-B コンパクト化された K_Q と一致することを示さなければならない。この Y はキャッソンハンドルである。この閉包を K とすると、 K は S-B handle で

ある。実際 $\bar{Y} - Y := L$ 上の任意の点 p は $p_k \in \beta_k \subset T_{6(k-1)+1-6k}^k$ となる点列 p_k の収束先としてあらわすことができる。また $p \in \bigcap_{k \geq 1} \beta_k$ であるから $L = \bigcap_{k \geq 1} \beta_k$ がいえる。

よって L の任意の点に対して、 $Fr^+(K_Q)$ のある点を次のように対応させることができる。 $q \in L$ に対してそれを含む β_k の中の ball に含まれる tower を追跡する。そのとき対応する X_k に成分の追跡による Wh_Q 上の収束先として定義するのである。この対応を $f: \bar{Y} \rightarrow K_Q$ とする。残された問題は f が同相であること（特に L 上で）のチェックのみである。今、 $Fr^+(K_Q)$ のある点の周りの位相の base は W_n に含まれる open set O からなる。この逆像 $f^{-1}(O)$ は β_n の中のある成分に属するものである。この集合は開集合となる。

次の目標は design を作ることである。

τ -labeled tree S を base point をひとつ持ち、各 vertex が 3 またになっている無限 tree とする。rank が 2 の自由群 F_2 のケーリーグラフの右半分（単位元 = base point の vertex も加える）と思えばよい。ここでは S の各 edge に対して $[0, 1]$ の 3 進的有限小数展開のうち、1 を含まないものを割り当てる方法をとる。ただ、.2200 と .220 などと同じ実数をとるが違う edge（この場合は隣り合う edge）として考える。また、base point からの距離が単調的な連結な edge の集まりを無限回ったものを branch と呼ぶ。この branch 全体はあるコントロール集合 ($C.S.$) と同一視される。つまり branch とは 0 と 2 からなる 3 進的無限小数展開によって $[0, 1]$ 上の $C.S.$ のひとつを指定することになる。 $c \in C.S.$ に対する branch を B_c と書く（図 11）。

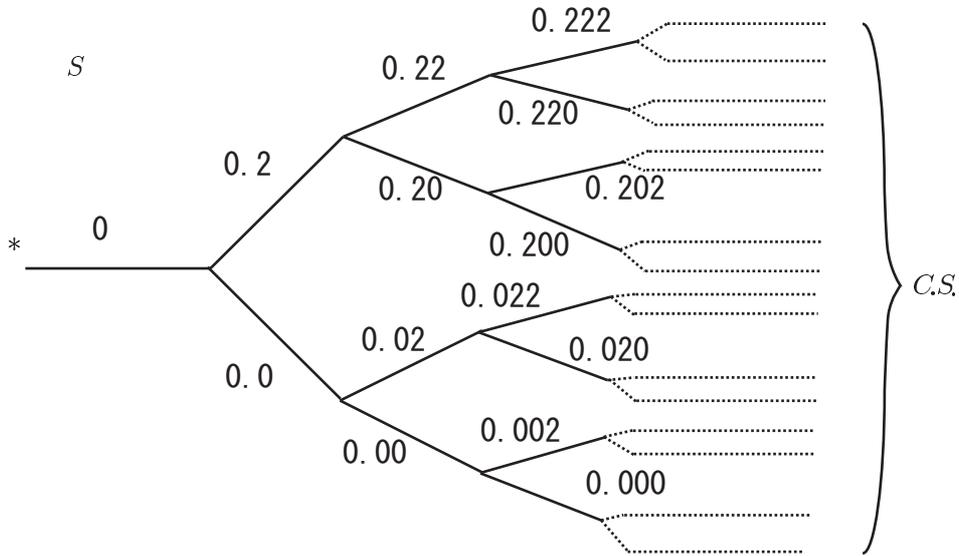


図 11: τ -labeled tree

Q を \pm -labeled tree とする。 Q に付随する τ -labeled tree とは任意の edge $e \subset S$ に対して K_Q に埋め込まれるある 6-stage tower τ_e を対応させる対応のことである。ただし τ_e

の π_1 を生成する loop による有限個の (top-)kink には順番が付いており、 B_c に対しては K_Q に埋め込まれたある S-B handle が対応する。対応 τ_e は以下の 3 つの条件を満たす。

- 1) $e, e' \subset S$ を隣り合う 2 つの edge とし、 $e' = e2, e0$ とすると e に含まれる top の kink の総数は e' の成分数に等しいとする。
- 2) $B_{.222\dots}$ には K_Q 自身を対応させる。
- 3) 最後が 2 で終わるある小数展開 $e = .c_1c_2\dots c_{n-1}2$ があるとする。
そのとき、 $.c_1c_2\dots c_{n-1}02222\dots$ のような形の無限小数展開を c とする。
 $e^k = .c_1c_2\dots c_{n-1}02222\dots 2$ (最後に 2 が k 個続く。) $\tau_{e^0} \cup \tau_{e^1} \cup \dots =$ は S-B handle で定理 5.1 の方法で構成したもの。 τ_{e^k} は $\text{int}(K)$ の $T_{6k+1-6(k+1)}^{k+1}$ 部分である。

定理 5.4 (Theorem 5.2 in Freedman's paper) 任意の \pm -labeled tree とする。このときそれに付随する τ -labeled tree が存在する。

証明 帰納的に定義する。まず、 $B_{.222\dots}$ に対しては K_Q お割り当てしておく。このとき、有限小数展開 $B_{.222\dots 2}$ を 6-stage 毎に区切って順番に対応させておく。ただし base point から伸びる最初の edge e_i に対しては最初の 6-stage を対応させる。

次に、 $B_{.c_1\dots c_n 222\dots}$ に対してある S-B handle が定義されているとする。ここで小数の中に 0 があるとすると第 n 位まで。これらは上記の 1) と 3) は満たすとする。今、 $c' = .c_1c_2\dots c_n 022\dots$ とし、 $e = .c_1c_2\dots c_n 2$ とおく。帰納法の仮定により 6-stage τ_e の中にキャッソンハンドルのコンパクト化 K が作られている。そこで $B_{.c_1c_2\dots c_n 0222\dots} = K$ として定義しておけば 1)3) を満たす。このような構成を続ければ $n+1$ 位に 0 があるような edge に対してすべて τ -labeled tree を作るができる。この構成を帰納的に繰り返せばすべての edge に対して 6-stage tower を 1)2)3) を満たすようにつくるができる。

次にその τ から branch $c \in C.S.$ に対して S-B handle K_c を c に属する edge に対応する 6-stage を積み上げたものの閉包をとすればよい。

この証明で定理 5.1 を何度か使ったがその際 K の取り方はあくまで任意性があるがそのどれをとるかはここでは重要ではない。 Q に対する τ -labeled tree を $S(Q)$ と書く。

定理 5.5 (The latter of Theorem 5.3 in Freedman's paper) Q をある \pm -labeled tree だとする。任意の $c \in C.S.$ に対して B_c に対する \pm -labeled tree を Q_c とする。このとき、ある埋め込みの族 $\{i_c\}$ があって以下を満たす。

- (a) 実数として $c' < c$ ならば $i_{c'}(K_{Q_{c'}}) \subset i_c(K_{Q_c}) \subset K_Q$
- (b) c と c' が第 n 位まで一致するなら $i_c(K_c)$ と $i_{c'}(K_{c'})$ は $6(n+1)$ -stage まで一致する。
- (c) 任意の $c \in C.S.$ に対して $K_{Q_c} \cap \partial K_Q = \partial^- K_{Q_c} \cap \partial^- K_Q = \partial^- K_Q$ が成り立つ。

証明 c を $.c_1c_2 \cdots c_n 0222 \cdots$ とする。 $e = .c_1c_2 \cdots c_n 2$ とおく。このとき、 $K_{Q_e} = K_c \hookrightarrow \tau_e$ が成り立つ。今 $\forall c \in C.S.$ に対して

$$\overline{\cup_{e:\text{initial segment of } c\tau_e} \dot{Z}_c}$$

とおくと \dot{Z}_c は B-S-handle である。というのも $\text{diam}(\tau_e) \rightarrow 0$ (有限小数展開を伸ばす極限) である。

ここからは design $\mathfrak{D}(S(Q)) = \mathfrak{D}(Q)$ を構成する。 $D' \subset D^2$ を同心円状の円板とする。 S_r^1 を D' から距離 r 離れた円とし、 $S_1^1 = \partial D^2$ となるように D^2 の半径を調整する。通常の 2-handle $D^2 \times D^2$ を H とおく。

今任意に $c \in C.S.$ をとる。 B_c を $S(Q)$ を branch とする。 Q_c に対してトーラスの入れ子 X_n^c を決める。(ここで以前の定義だと X_i は i -stage 目に関する solid torus の集合を表したがここからは $6(i+1)$ -stage 目を表すものとする。) このとき、

$$D' \times S_c^1 \supset X_1^c \supset X_2^c \supset X_3^c \supset \cdots$$

の入れ子を Q_c に対するキャッソンハンドルに対するものとする。

このように定義すると c と c' が n 位まで一致するとすると X_n^c と $X_n^{c'}$ は $D' \times D^2$ の中で shift により isotopic である。

ここで、

$$\bar{X}_1 = X_1^0 \times [0, 1]$$

とする。また同じように

$$\bar{X}_2 = X^0 \times [0, .1] \cup X_2^2 \times [.2, 1]$$

$$\bar{X}_3 = X^{00} \times [0, .01] \cup X_3^{02} \times [.02, .10] \cup X_3^{20} \times [.20, .21] \cup X_3^{22} \times [.20, 1]$$

...

として

$$\cap_{n=1}^{\infty} \bar{X}_n = \cup_{c \in C.S.} Wh_{Q_c} \text{ かつ } Wh_{Q_c} \subset D' \times S_c^1$$

とし、 $\cap_{n=1}^{\infty} \bar{X}_n$ の成分の集合とする。

$$\mathcal{B}_k = \text{int}(\bar{X}_k) \cap D' \times S^1 \times \left\{ k \text{ 番目の取り除く真ん中の } \frac{1}{3} \right\}$$

として $\mathcal{B} = \cup_{k \geq 1} \mathcal{B}_k$ とおく。また $A = H - \{ \mathcal{B} \cup (\text{int}(D') \times \text{int}(D')) \}$ として

$$\mathfrak{D}(Q) = A / \overline{Wh_S}$$

として定義する (図 12)。このとき、 $\partial^- A = \partial^- \mathfrak{D}(Q) = \partial D^2 \times D^2 \subset H$ であり、埋め込み

$$(\mathfrak{D}(Q); \partial^- \mathfrak{D}, Fr^+(\mathfrak{D}(Q))) \hookrightarrow (K_Q; \partial^- K_Q, Fr^+(K_Q))$$

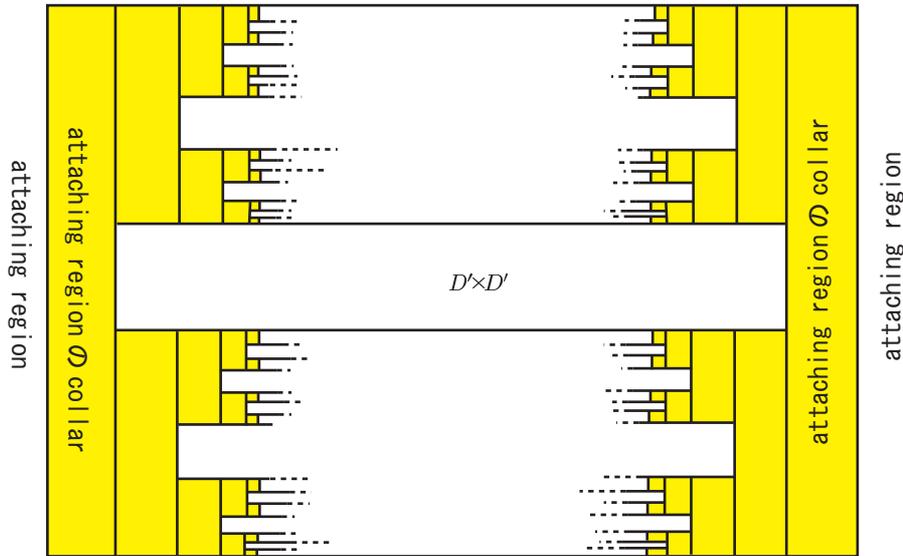


図 12: A

が存在する。このとき、任意の $c \in C.S.$ に対する S-B handle の K_c の $Fr^+(K_c)$ のカラーの埋め込みを同時に指定することになる。この埋め込みを用いて 6 章以後の議論を進めていくことになる。

参考文献

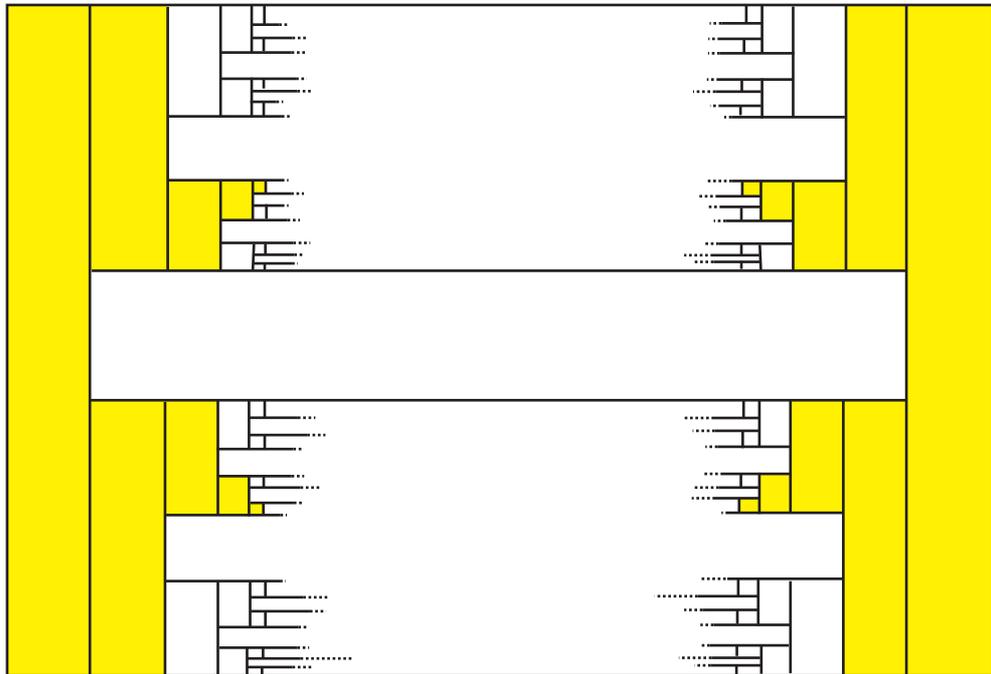
- (1) Michael Hartley, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Differential Geom. **17** (1982) no.3, 357-453
- (2) Robert E. Gompf and Sukhjit Singh, *On Freedman reimbedding theorems Four-manifold theory* (Durham, N.H., 1982), 277-309 Contemp. Math., **35**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984.

おわりに

この文章は Freedman の例の論文と Gompf-Singh¹による論文（参考文献 (2)）に即した Casson-Freedman 理論の解説でありほとんどその 2 つの和訳になってしまったかもしれないことをここでお詫び申し上げます。しかしそれは筆者が怠けているわけではなく非の打ちどころのないほど彼らの論文の完成度が高いからでもある。もし細かい議論が自分で埋められない場合はどちらかの元論文に当たるのがよいと感ずる。

¹参考文献 (2)

0.022...



0.202...

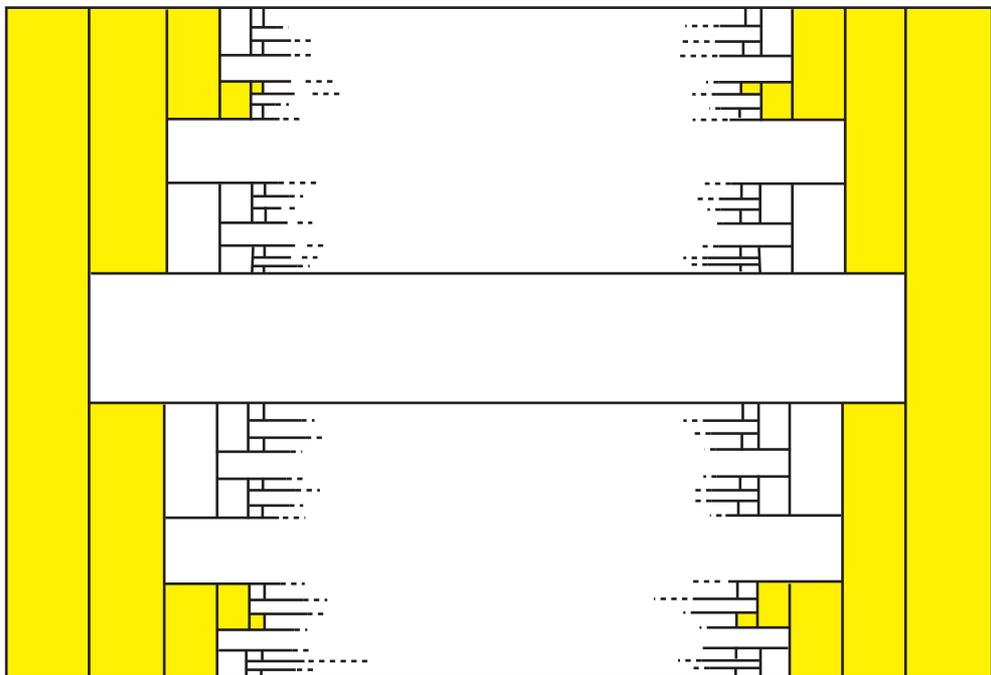


図 13: K_c のカラーの埋め込みの例



図 14: 入れ子の例 (マトリョーシカ)