§2 Bing's shrinking criterion and star-like decompositions.

§1 Theorem 2 の証明の肝心なところは "cellular set は $\mathbb{R}^n$ の中でいくらでも小さく変形できる" ということであった。そこで topological manifold M の decomposition $\mathcal{D}$ に対して canonical projection:

$\pi : M \longrightarrow M/\mathcal{D}$ が ABH (Approximable By Homeomorphisms) であることを示したければ、"$\mathcal{D}$ の member 1つ1つがいくらでも小さくなるように変形できる" ことを要請するのは自然であろう。ただしこの場合は、$\mathcal{D}$ の member を "一斉に小さくする" ような変形を考えなければならない。

こうして次の定義に到る。

以下全ての decomposition $\mathcal{D}$ は usc(= upper semicontinuous) で、$\mathcal{D}$ の各 member は compact であるとする。

X を locally compact separable metrizable space, d_X : a metric on X.

$\mathcal{D}$ を X の usc decomposition で $\forall \Delta \in \mathcal{D}$ は compact であるものとする。
(従って $X/\mathcal{D}$ は locally compact separable metrizable であるから、$X/\mathcal{D}$ の metric d_Y を一つ固定する)

Def 1. $\mathcal{D}$ が、Bing's shrinking criterion (BSC) をみたすとは、

$\forall \varepsilon : X \to (0, \infty)$

$\exists h : X \longrightarrow X$ a homeo. s.t.

(1) $\operatorname{diam}_{d_X} h(\Delta) < \min_{x \in \Delta} \varepsilon(x)$

(2) $d_Y(\pi(x), \pi h(x)) < \varepsilon(x) \quad \forall x \in X$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft\varepsilon"] & X \arrow[dl, "\pi"] \\ & X/\mathcal{D} & \end{tikzcd}$$

Theorem 2 (Freedman Theorem 7.1 p.414-5).

$f : X \longrightarrow Y$ locally compact separable metric space X, Y の間の proper surjection.

f is ABH $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{D}(f) = \{ f^{-1}(y) \mid y \in Y \}$ satisfies BSC.

proof.
アイディアをはっきりさせるため、X, Y が compact であるときにのみ証明する（X, Y が compact なら majorant function として positive constant を考えれば十分である）。以下の証明は [3, Chap.6, §1 p.254-256] による。

$\Rightarrow$ $\varepsilon > 0$ に対して、homeomorphism $g : X \to Y$ を

$$d_Y(g, f) := \sup \{ d_Y(g(x), f(x)) \mid x \in X \} < \varepsilon/2 \quad \cdots (1)$$

をみたすようにとり。(ABH)

$\gamma > 0$ を $\gamma < \varepsilon$ かつ

$$A \subset Y,\ \mathrm{diam}_Y A < \gamma \Rightarrow \mathrm{diam}_X\, g^{-1}(A) < \varepsilon/2 \quad \cdots (2)$$

をみたすようにとる。

ABH から

$$\exists h : X \longrightarrow Y \quad \text{s.t.} \quad d_Y(h, f) < \gamma/2,\ \varepsilon/2 \quad \cdots (3)$$

$k := g^{-1} \circ h : X \longrightarrow X$ とおく。

$\mathrm{diam}_X\, k(f^{-1}(y)) < \varepsilon$ ($\because$ (2) (3))

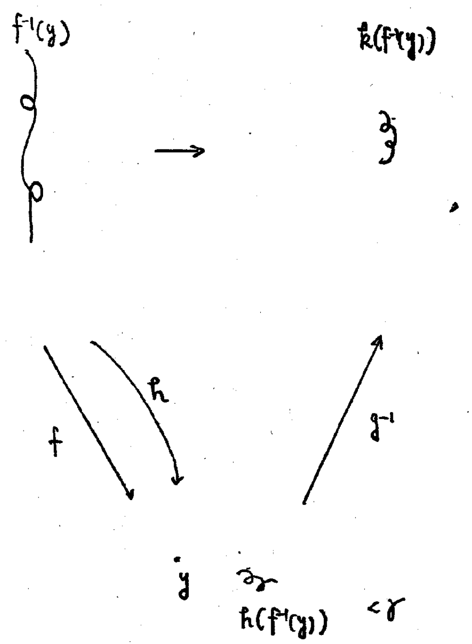
$$d_Y(f \circ k, f) = d_Y(f \circ g^{-1} \circ h, f)$$

$$\leq d_Y(f \circ g^{-1} \circ h, g \circ g^{-1} \circ h) + d_Y(h, f)$$

(1) + (3)

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

//



$\Leftarrow$. $\mathcal{D}(f)$ が shrinking criterion をみたすとする。まず：

Lemma A. $\forall \varepsilon > 0$ $\forall h : X \to X$ homeo, $\exists k : X \to X$ a homeo. s.t.

(1) $f \circ k$ は ε-map, i.e. $\forall y \in Y$ $\mathrm{diam}_X (f \circ k)^{-1}(y) < \varepsilon$

(2) $d_Y(f \circ h, f \circ k) < \varepsilon$.

proof

$\varepsilon>0$ と h に対して $\gamma>0$ を

$$\mathrm{diam}_X A < \gamma \Rightarrow \mathrm{diam}_X h^{-1}(A) < \varepsilon \quad \cdots (1)$$

をみたすようにとる.

f に (BSC) をつかって

$$\exists g : X \longrightarrow X \text{ a homeo. s.t. } \quad d_Y(f, f\circ g) < \varepsilon \quad \cdots (2)$$
$$\mathrm{diam}_X\, g(f^{-1}(y)) < \gamma \quad \forall y\in Y \quad \cdots (3)$$

$k := g^{-1}\circ h : X \to X$ とおく.

$$d_Y(f\circ h, f\circ k) = d_Y(f\circ h, f\circ g^{-1}\circ h)$$
$$= d_Y(f, f\circ g^{-1}) = d_Y(f\circ g, f) < \varepsilon.$$

$y\in Y$ に対して. $(f\circ k)^{-1}(y) = k^{-1}f^{-1}(y) = h^{-1}\underbrace{g f^{-1}(y)}_{\mathrm{diam}_X < \gamma}$ は $\mathrm{diam}_X < \varepsilon$ をみたす (∵ (1)) //.

Lemma B. $\varepsilon>0$ に対して

$$E_\varepsilon(X,Y) = \{\varphi : X \longrightarrow Y \mid \varphi \text{ は surjection かつ } \mathrm{diam}_X \varphi^{-1}(y) < \varepsilon \ \forall y\in Y\}$$ とおくと.

$E_\varepsilon(X,Y)$ は open. in $C(X,Y)$ = X から Y への continuous surjection with metric d_Y.

proof. $\varphi : X \longrightarrow Y \in E_\varepsilon(X,Y)$ とする. φ が closed map だから. X の decomposition

$\mathcal{D}(\varphi) = \{\varphi^{-1}(y) \mid y\in Y\}$ は usc (§1. Def. 6 p.1.6) である. よって $y\in Y$ の open nbd U_y を

$\mathrm{diam}_X \varphi^{-1}(U_y) < \varepsilon$ をみたすようにとれる.

Y の open cover $\{U_y \mid y\in Y\}$ の Lebesgue number $\delta>0$ をとる.

$d_Y(\psi,\varphi) < \delta/2$ とする. $y\in Y$ に対して $\mathrm{diam}_Y\, \varphi(\psi^{-1}(y)) < \delta$ がわかるから.

$\varphi(\psi^{-1}(y)) \subset U_{y'}$ をみたす y' がとれる. すると $\psi^{-1}(y) \subset \varphi^{-1}\varphi(\psi^{-1}(y))$
$\subset \varphi^{-1}(U_{y'})$ より

$\mathrm{diam}_X \psi^{-1}(y) < \varepsilon$ が示される. //

proof of $\Leftarrow$) : $\varepsilon > 0$ を任意に与えて.

$h_0 = id_X$ とする. Lemma A を inductive に用いて homeo. の sequence

$(h_n : X \to X)_{n=0}^{\infty}$ を

(n.1) $f \circ h_n$: an $(\frac{1}{n+1})$-surjection

(n.2) $d_Y(f\circ h_{n+1}, f\circ h_n) < \frac{\varepsilon}{3^{n+1}}$ ととる. ここで

Lemma B から. $E_{1/i}(X,Y)$ は $C(X,Y)$ 内の open set だから

$F_i = C(X,Y) - E_{1/i}(X,Y)$ とおくと. $d_Y(f\circ h_i, F_i) > 0$ に注意する。

Lemma A から. (h_n) は、(n.2) に加えて 次の条件もみたすようにとれる :

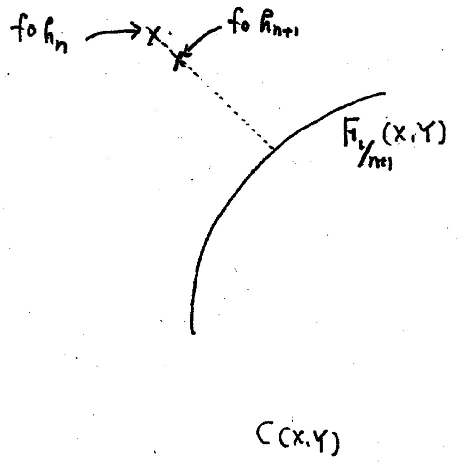
(n.3) $d_Y(f\circ h_{n+1}, f\circ h_n) < \frac{1}{3^{n+1}} \min\{ d_Y(f\circ h_i, F_{1/i+1}(X,Y)) \mid i = 0, 1, \dots, n \}$.

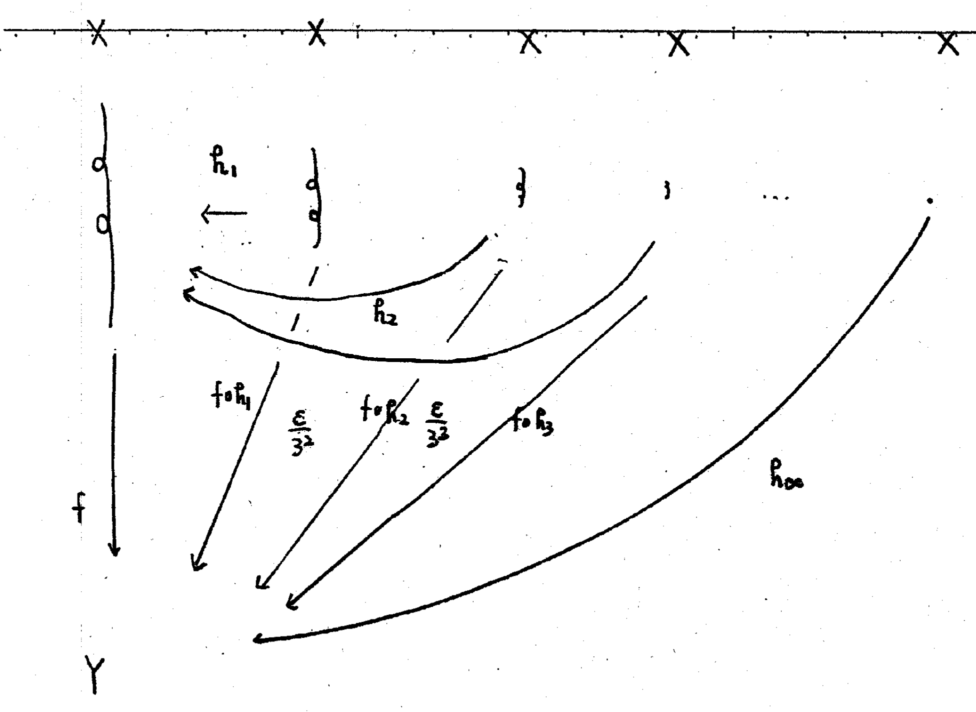
(n.2) から $(f\circ h_n)$ は Cauchy 列だから.

$h_\infty := \lim_{n\to\infty} f\circ h_n$ が存在し continuous surjection である. $d_Y(f, h_\infty) < \varepsilon$ も (n.2) から得られる.

更に (n.3) から. $\forall n$ に対して h_∞ は $\frac{1}{n+1}$-map となる. $h_\infty^{-1}(y) = $ a pt. $\forall y \in Y$.

よって h_∞ は homeomorphism である。





上の証明を次の様に書き直すことができる:

$$E = \overline{\{ f\circ h \mid h: X\to X : \text{homeo} \}} \underset{\text{closed}}{\subset} C(X,Y) : \text{completely metrizable}.$$
$$\rotatebox{90}{$\in$}\ f$$

$E_i = \{ g\in E \mid g$ は $1/i$-map$\}$ とおく.

f が BSC をみたすなら E_i は dense (Lemma A) かつ open (Lemma B).

E も completely metrizable だから $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ も dense (Baire の定理). 一方

$\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ = Homeo(X, Y) より f は homeomorphism で近似できる i.e. f : ABH.

上の議論を locally compact space の proper map に拡張したものが Freedman p.415 の証明である.

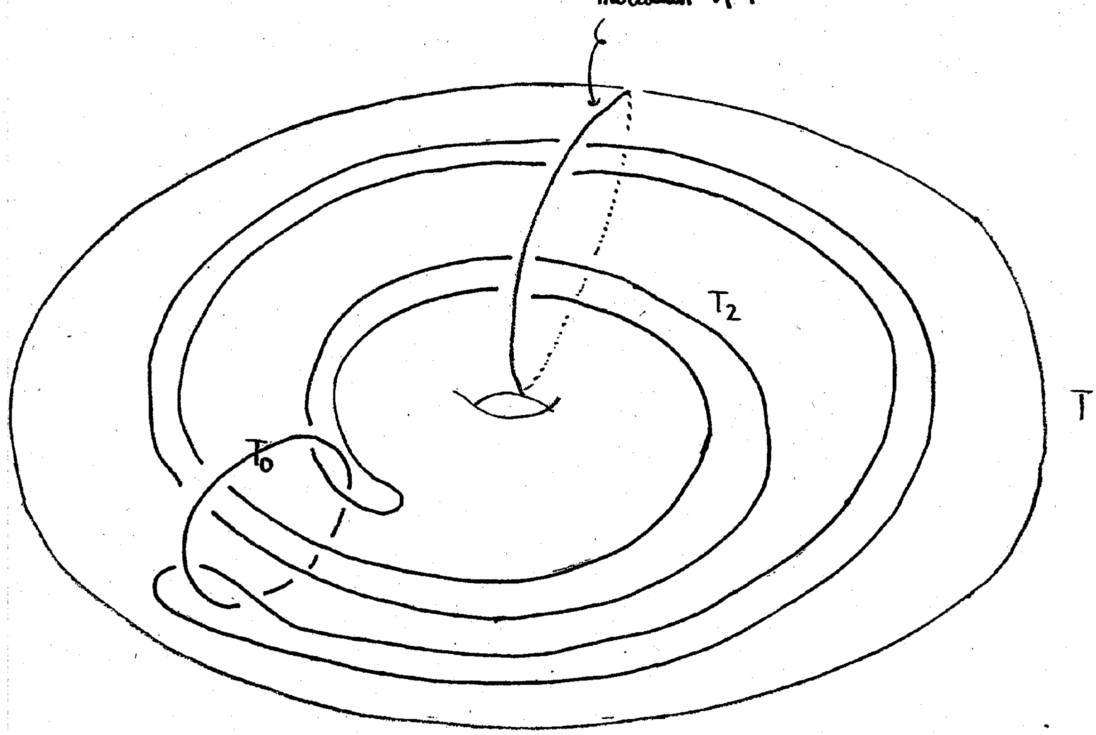
§1, Theorem 2 でみたように、$\mathbb{R}^n$ 内の cellular set X を一点につぶした空間 $\mathbb{R}^n/X$ は $\mathbb{R}^n$ と同相である。その証明は、$\pi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n/X$ が ABH であることを示している。

しかし $\mathbb{R}^n$ の decomposition $\mathcal{D}$ が「各 $\Delta \in \mathcal{D}$ が cellular in $\mathbb{R}^n$」をみたしていても
projection
$\pi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n/\mathcal{D}$ が ABH であるとは限らない。言い換えれば $\mathcal{D}$ が Bing Shrinking Criterion をみたすとは限らない。

Freedman p.416 に述べられている Bing の反例は、その様な decomposition のうち "極小" なものである。

Example 3 (Bing 1962 [1. p.66-68]).

$\mathbb{R}^3$ 内に標準的に埋め込まれた solid torus T を考え、int T に2つの solid tori を次の様にとる：



homeomorphism $h_0 : T \longrightarrow T_0$, $h_2 : T \longrightarrow T_2$ を固定する。

$T_{00} = h_0(T_0) = h_0 h_0(T) \subset T_0$ $\qquad$ $T_{02} = h_0(T_2) = h_0 h_2(T) \subset T_0$

$T_{20} = h_2(T_0) = h_2 h_0(T) \subset T_2$ $\qquad$ $T_{22} = h_2(T_2) = h_2 h_2(T) \subset T_2$ とおく。

$(T_0, T_{00}) \approx (T, T_0) \approx (T_2, T_{20})$ $\qquad$ $(T_2, T_{02}) \approx (T, T_2) \approx (T_2, T_{22})$ に注意する。

つまり T_{20} は、T_2 の中に "T と T_0 の関係と同じように" 描いた solid torus である 等々。

0と2から成る列 $i_1 i_2 \cdots i_n \in \{0,2\}^n$ に対して

$$T_{i_1 i_2 \cdots i_n} := h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_n}(T) \quad \text{と定義すると.}$$

$$T_{i_1 i_2 \cdots i_n i_{n+1}} \subset T_{i_1 \cdots i_n} \qquad (T_{i_1 \cdots i_n}, T_{i_1 \cdots i_n i_{n+1}}) \approx (T, T_{i_{n+1}})$$

が成り立つ. そこで 無限列 $\underline{i} = (i_1 i_2 \cdots) \in \{0,2\}^\infty$ に対し.

$$T_{\underline{i}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_{i_1 i_2 \cdots i_n} \quad \text{とおく.}$$

$\mathfrak{D} = \{ T_{\underline{i}} \mid \underline{i} \in \{0,2\}^\infty \} \cup \{ \{x\} \mid x \in \bigcup_{\underline{i} \in \{0,2\}^\infty} T_{\underline{i}} \}$ とおくと. $\mathfrak{D}$ は $\mathbb{R}^3$ の usc decomposition を与える。

h_0 と h_2 をうまくとれば.

$$\operatorname{diam} T_{i_1 \cdots i_n} \leq \frac{1}{2^{\#\{k \mid 1 \leq k \leq n,\ i_k = 0\}}} \quad \cdots (i) \quad \text{とできる.}$$

従って $\underline{i} = (i_1, i_2, \cdots)$ の中に 0 が無限回現われれば. $T_{\underline{i}} = a\ pt.$ であるから.

$\mathfrak{D}$ の member で 1点でないものは

$T_{(i_1 i_2 \cdots i_N 222 \cdots\cdots)}$ の形をしているものに限る. こういった member は可算個.

更に (i) から. 次が成り立つ:

(ii). $\forall \varepsilon > 0 \quad \{ T_{\underline{i}} \mid \operatorname{diam} T_{\underline{i}} > \varepsilon \}$ は有限集合.

これをみたす様な decomposition $\mathfrak{D}$ を <u>countable-null</u> という (Freedman p. 416)

T_0 は"小さく", T_2 は"細長い", しかもどちらも T の中の inessential solid torus であるから. T_0 を含む 3-ball $D_0 \subset \operatorname{Int} T$, T_2 を含む 3-ball $D_2 \subset \operatorname{Int} T$ がとれる。
このことを使えば

(iii) $\forall T_{\underline{i}}$ は cellular

である. 一方

(iv) $\mathfrak{D}$ は BSC をみたさない

ことが知られている。厳密な証明は面倒だが、"T_2 を縮めようとすると T_0 はつられて大きくなってしまう" ことから直観的にはもっともらしい.

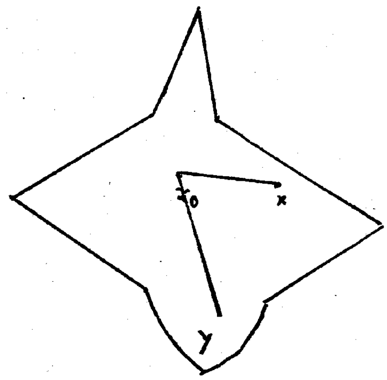
では countable-null decomposition $\mathfrak{D}$ が BSC をみたすのはどのようなときか？ この問いに対する一つの答えが Freedman, Theorem 7.2 で与えられている。 ここでは Theorem 7.2 を特別な場合に証明し、一般の場合にどの様な考察を加えればよいかについて簡単に触れる。

Def. 4. $\mathbb{R}^n$ の compact set X が star-like であるとは、X が

$$\exists x_0 \in X \text{ s.t. } \forall x \in X \ \forall t \in [0,1] \quad tx + (1-t)x_0 \in X$$

をみたすこと。

$\mathbb{R}^n$ の usc decomposition $\mathfrak{D}$ が star-like であるとは、
$\mathfrak{D}$ の各 member が star-like であることとする。



a starlike, non convex set $\subset \mathbb{R}^2$

Theorem 5. $\mathfrak{D}$: $\mathbb{R}^n$ の usc, countable-null, star-like decomposition とする。
このとき、$\mathfrak{D}$ は BSC をみたし、とくに $\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n/\mathfrak{D}$.

Theorem 5 を証明するためには次の結果が鍵となる。 Decomposition $\mathfrak{D}$ に対し、
$\mathcal{H}_{\mathfrak{D}} = \{\Delta \in \mathfrak{D} \mid \Delta \neq pt\}$, $N_{\mathfrak{D}} = \cup \mathcal{H}_{\mathfrak{D}}$ とする。

Theorem 6. X : a locally compact separable metric space.

$\mathfrak{D}$: an usc decomposition of X s.t. $\mathcal{H}_{\mathfrak{D}}$ は countable collection かつ
$\forall \epsilon > 0$
$\forall \Delta \in \mathfrak{D}$ に対し $\exists h : X \to X$ homeo. s.t.

(1) $h | X \setminus N(\Delta : \epsilon) = id$

(2) $\mathrm{diam}_X\, h(\Delta) < \epsilon$

(3) $\forall D \in \mathfrak{D}$ $\quad \mathrm{diam}_X\, h(D) < \epsilon$ or $h(D) \subset N(D : \epsilon)$

とする。 このとき $\mathfrak{D}$ は BSC をみたす

(1. p.47 Theorem 5).

ひとまず Theorem 6 を認めて. Theorem 5 の証明を行う:

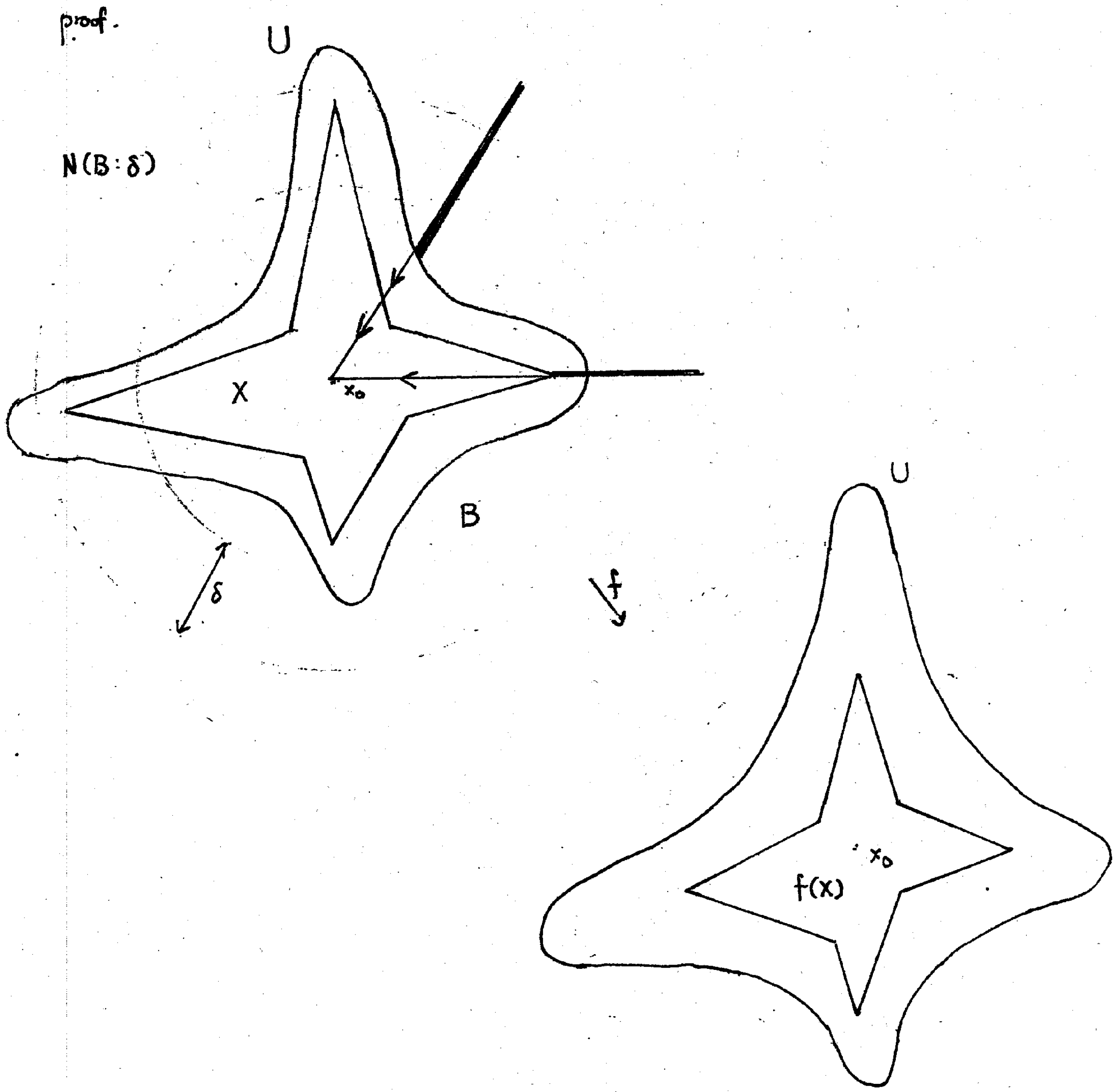
Lemma 7. X: a compact starlike set $\subset \mathbb{R}^n$ x_0: the associated pt. (of X).

U: open $\supset X$. B = the Euclidean ball centered at x_0 s.t. $X \subset N(B;\delta)$.

$\exists f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a homeo s.t.

(1) $f \mid \mathbb{R}^n - (U \cap N(B:\delta)) = id$.
(2) $f(X) \subset \mathrm{Int}\, B$
(3) $f(X)$: star-like w.r.t. x_0
(4) $d(f, id_{\mathbb{R}^n}) < \delta$

proof.



Proof of Theorem 5. (modulo Theorem 6).

$\mathfrak{D}$: an USC countable-null decomposition, $\forall \Delta \in \mathfrak{D}$ は starlike とする. $\mathfrak{D}$ が Theorem 6 の条件:

$\forall \Delta \in \mathfrak{D}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a homeo. s.t.

(1) $h | \mathbb{R}^n - N(\Delta; \varepsilon) = \mathrm{id}$
(2) $\mathrm{diam}_{\mathbb{R}^n} h(\Delta) < \varepsilon$
(3) $\forall D \in \mathfrak{D}$ $\mathrm{diam}\, h(D) < \varepsilon$ or $h(D) \subset N(D; \varepsilon)$

を示せばよい.

Δ が star-like with respect to x_0 としよう. $\Delta \subset N(x_0; \frac{k}{3}\varepsilon)$ をみたす最小の k をとる.

h は $(k-1)$ 個の homeo. の合成として $h = f_{k-1} \circ \cdots \circ f_1$ という形で与えられる:

Step 1. $\exists U_1$: open $\supset \Delta$ s.t.
$\forall D \in \mathfrak{D}$ ($D \neq \Delta$) with $D \cap U_1 \neq \emptyset$ $\mathrm{diam}\, D < \varepsilon/3$ ∵) $\mathfrak{D}$ が countable-null だから

Lemma 7 を $B = N(x_0; \frac{k-1}{3}\varepsilon)$ と $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ に対して用いると:

$\exists f_1: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a homeo s.t.

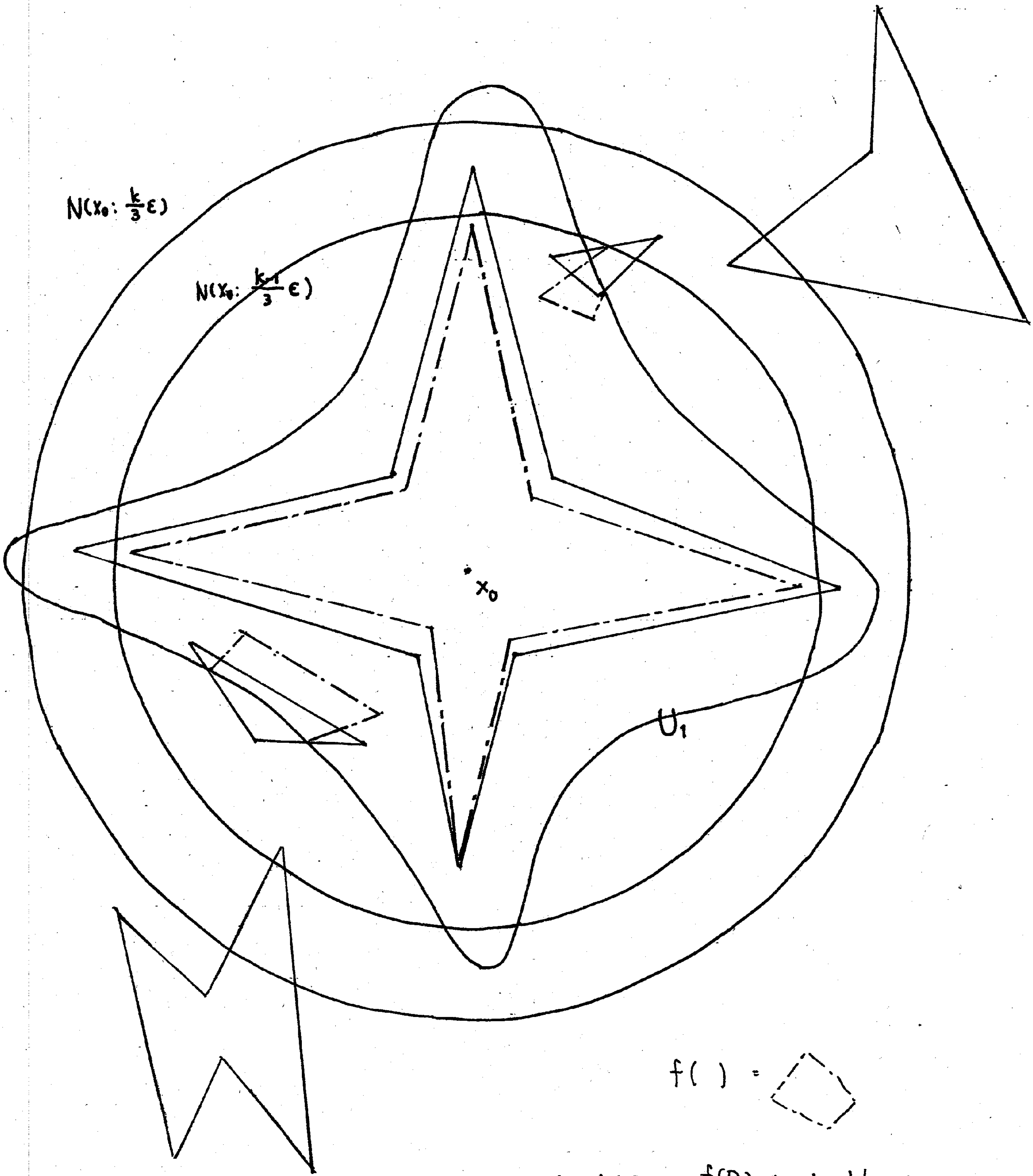
(1.1) $f_1 | \mathbb{R}^n - (U_1 \cap N(x_0; \frac{k}{3}\varepsilon)) = \mathrm{id}$.
(1.2) $f_1(\Delta) \subset N(x_0; \frac{k-1}{3}\varepsilon)$
(1.3) $f_1(\Delta)$ is star-like w.r.t. x_0 $\subset \Delta$
(1.4) $d(f_1, \mathrm{id}) < \varepsilon/3$ ととれる。

Step 2. $f_1(\Delta) \subset \Delta \subset U_1$ に注意して、再び countable-nullity を用いて

(2.0) $f_1(\Delta) \subset U_2 \subset \overline{U}_2 \subset U_1$
$\Delta \neq \forall D \in \mathfrak{D}$ with $f_1(\Delta) \cap U_2 \neq \emptyset$ $\mathrm{diam}\, f_1(D) < \varepsilon/3$ をみたす様にとる

Lemma 7 を $B = N(x_0; \frac{k-2}{3}\varepsilon)$ と $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ に対して用いて.

$\exists f_2: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a homeo s.t.
(2.1) $f_2 | \mathbb{R}^n - (U_2 \cap N(x_0, \frac{k-1}{3}\varepsilon)) = \mathrm{id}$
(2.2) $f_2 f_1(\Delta) \subset N(x_0; \frac{k-2}{3}\varepsilon)$
(2.3) $f_2 f_1(\Delta)$ star-like w.r.t. x_0 (2.4) $d(f_2, \mathrm{id}) < \varepsilon/3$ ととる.



$f(\ ) =$

$D \neq \Delta$ なら　$f(D)$ は star-like とは限らない.

Step 1 において 次に注意する：

(1.5) $\Delta \neq D \in \mathfrak{D}$ $\quad f_1(D) = D$ or $\operatorname{diam} f_1(D) < \varepsilon$.

(∵). $D \cap (U_1 \cap N(x_0 : \frac{\varepsilon}{3})) = \phi$ なら. (1.1) から $f_1(D) = D$.

$D \cap (U_1 \cap N(x_0 : \frac{\varepsilon}{3})) \neq \phi$ なら. U_1 の取り方から $\operatorname{diam} D < \frac{\varepsilon}{3}$.
$d(f, id) < \varepsilon/3$ だから. $\operatorname{diam} f(D) < \frac{\varepsilon}{3} + 2\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

同様に step 2 における f_2 は 次をみたす：

(2.5) $\Delta \neq D \in \mathfrak{D}$ $\quad f_2 f_1(D) = f_1(D)$ or $\operatorname{diam} f_2 f_1(D) < \varepsilon$

これをくり返して
Step j : open set U_j を

(j.0) $f_{j-1} \circ \cdots \circ f_1(\Delta) \subset U_j \subset U_{j-1}$

$\Delta \neq {}^{\forall}D \in \mathfrak{D}$ with $f_{j-1} \circ \cdots \circ f_1(D) \cap U_j \neq \phi$ $\quad \operatorname{diam} f_{j-1} \circ \cdots \circ f_1(D) < \varepsilon/3$
ととり. Lemma 7 を用いて

$f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a homeo s.t.

(j.1) $f_j \mid \mathbb{R}^n - \left(U_j \cap N(x_0 : \frac{k-j+1}{3}\varepsilon)\right) = id$

(j.2) $f_j \circ f_{j-1} \circ \cdots \circ f_1(\Delta) \subset N(x_0 : \frac{k-j}{3}\varepsilon)$

(j.3) $f_j \circ \cdots \circ f_1(\Delta)$ is star-like wrt x_0

(j.4) $d(f_j, id) < \varepsilon/3$

(j.5) ${}^{\forall}D \in \mathfrak{D}$, $D \neq \Delta$ $\quad f_j \circ \cdots \circ f_1(D) = f_{j-1} \circ \cdots \circ f_1(D)$ or

$\operatorname{diam} f_j \circ \cdots \circ f_1(D) < \varepsilon$.

をとる。

最後に $h = f_k \circ \cdots \circ f_1$ とおけば $h(\Delta) \subset N(x_0 : \frac{\delta}{3})$

$h(D) = D$ or $\operatorname{diam} h(D) < \varepsilon$ $\quad {}^{\forall}D \in \mathfrak{D}$, $D \neq \Delta$ //.

Remark.

(1) Δ 以外の $\mathfrak{D}$ の member D について $f_1(D)$, $f_2f_1(D)$, … は star-like とは限らないが
そのことは証明に影響しない.

(2) 上の証明で "$\mathfrak{D}$ が $\mathbb{R}^n$ の star-like decomposition である" という仮定は.
Δ が star-like であることのみに使われた. さらに 'Δ が star-like である' という仮定は.
"Δ が x_0 を apex とする cone structure をもつ" という形でのみ必要であった.

上の (1), (2) の注意から Freedman の quotation mark 付きの "star-likeness" の概念に至る.

Def 8. Z : a compact metrizable. $C(Z) = Z \times [0,\infty)/_{Z\times 0}$: the open cone.

$g : Z \to [0,\infty)$ を uppersemicontinuous function ($\lim_{n\to\infty} z_n = z \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} g(z_n) \leq g(z)$) と
する。 g は bounded としよう. ここで用いるのは

$\{(z,t) \mid 0 \leq t \leq g(z)\}$ $(\subseteq Z\times[0,\infty))$ が closed (従て compact) であるという事実のみである.

(1) $S \subset C(Z)$ が "star-like" であるとは $C(Z)$ の polar coordinate (z,t) によって

$S = \{(z,t) \mid 0 \leq t \leq g(z)\}$ と表わせること.

(2) locally compact separable metrizable space X の compact subset T が

"star-like" equivalent であるとは. T の open nbd $\mathcal{N}(T)$ (in X) と. topological embedding

$k : \mathcal{N}(T) \to C(Z)$ が

(i) $k(\mathcal{N}(T))$: open in $C(Z)$ (ii) $k(T)$ is "star-like"

をみたす様にとれること.

(3) locally compact separable metrizable space X の usc decomposition $\mathfrak{D}$ が

countable-null "star-like" equivalent decomposition であるとは.

(i) $\forall \varepsilon : X \to (0,\infty)$ $\{K \in \mathfrak{D} \mid \mathrm{diam}_X K > \min_{x\in K} \varepsilon(x)\}$ が discrete collection

(ii) $\forall K \in \mathfrak{D}$ は "star-like" equivalent set であること (cone structure を与える Z は K に依る).

Theorem 5 の証明が decomposition の member 1つの近傍における議論に尽きていたことを考えれば、次の結果もほぼ同じ議論で証明できることが納得できる.

Theorem 9. (Freedman p.417-420. Theorem 7.2).

X: a locally compact separable metrizable space

$\mathcal{D}$: a countable null "star-like" equivalent decomposition of X

$\Downarrow$

$\mathcal{D}$ shrinkable (i.e. BSC をみたす) $\quad$ ($\Leftrightarrow$ $\pi: X \to X/\mathcal{D}$ is ABH).

§2の残りでは Theorem 6 の証明を行う.

Theorem 6 : X : a locally compact separable metrizable space

$\mathcal{H}_{\mathcal{D}} = \{\Delta \in \mathcal{D} \mid \Delta \neq \text{a point}\}$ は countable collection で, かつ次をみたすとする :

$\forall \varepsilon>0 \quad \forall \Delta \in \mathcal{D} \quad \exists h : X \to X$ a homeo s.t.

(1) $h \mid X \setminus N(\Delta : \varepsilon) = id$ (2) $\mathrm{diam}_X\, h(\Delta) < \varepsilon$
(3) $\forall D \in \mathcal{D} \quad \mathrm{diam}_X\, h(D) < \varepsilon$ or $h(D) \subset N(D : \varepsilon)$.

このとき $\mathcal{D}$ は BSC をみたす.

proof.

Step 0. まず次が成り立つことに注意 :

$f : X \to X$ a homeo. $\Delta \in \mathcal{D}$, $\varepsilon > 0$ with $\overline{N(\Delta : \varepsilon)}$ (εが小さければ compact) に対して
homeo. $h : X \to X$ を

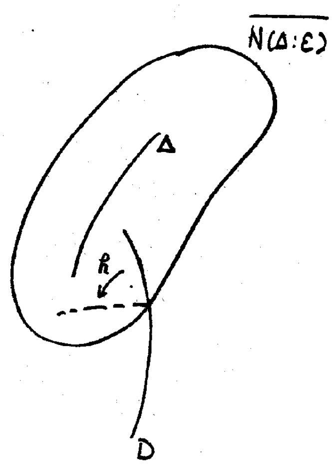
(1′) $f \circ h \mid X - N(\Delta : \varepsilon) = f \mid X - N(\Delta : \varepsilon)$
(2′) $\mathrm{diam}_X\, f h(\Delta) < \varepsilon$
(3′) $\forall D \in \mathcal{D} \quad \mathrm{diam}_X\, f h(D) < \varepsilon + \mathrm{diam}_X\, f(D)$.

をみたす様にとれる.

(∵) $f \mid \overline{N(\Delta : \varepsilon)}$ の uniform continuity から $\delta > 0$ を

$A \subset \overline{N(\Delta : \varepsilon)} \quad \mathrm{diam}_X A < \delta \Rightarrow \mathrm{diam}_X f(A) < \varepsilon/2$ ととって.

δに対して (1)〜(3) をみたす h をとればよい. //



以下 (1)′ - (3)′ を用いる.

議論を簡単にするため, 再び X は compact であると仮定しよう.
この仮定の下では
majorant function $\varepsilon : X \to (0, \infty)$ としては constant $\varepsilon > 0$ を
考えれば十分である.

Step. 1　$\varepsilon > 0$ を任意に固定する.

$$N_{\mathcal{D}} = \bigcup \mathcal{H}_{\mathcal{D}} \left(= \bigcup_{\Delta \in \mathcal{H}_{\mathcal{D}}} \Delta \right)$$ とおく.

$\mathcal{D}$ は usc decomposition だから.

$$N_{\mathcal{D}(\geq \frac{\varepsilon}{2})} := \bigcup_{\mathrm{diam}_X \Delta > \varepsilon/2} \Delta$$ は compact である.

(∵)　$(\Delta_n) \subset \mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ と $\mathrm{diam}_X \Delta_n \geq \varepsilon/2 \quad \forall n$ であるような sequence とする.　X が compact だから. subsequence (Δ_{n_k}) と取って

$$\Delta_{n_k} \xrightarrow[\text{Hausdorff convergence}]{} {}^{\exists}K\,(\text{compact})$$ とできる.　$\mathcal{D}$ が usc だから.

$K \subset \Delta$ をみたす Δ が存在し.　$\mathrm{diam}_X \Delta \geq \varepsilon/2$. //　(§2 末尾の注意参照).

仮定より $\mathcal{H}_{\mathcal{D}(\geq \frac{\varepsilon}{2})} = \{\Delta \in \mathcal{H}_{\mathcal{D}} \mid \mathrm{diam}_X \Delta \geq \varepsilon/2\}$ は countable だから. これを並べて

$= \{\Delta_j\}_{j=1}^{\infty}$ とする.

Δ_j の $\mathcal{D}$-saturated nbd U_j (i.e. U_j = $\mathcal{D}$ の member の(無限個の) union　§1. Def. 6 p. 1.6) と

$U_i \cap U_j = \phi$ or $U_i = U_j$　をみたすようにとる.
更に 必要なら 小さく 取り直して.
$\mathrm{diam}_{X/\mathcal{D}}\, \pi(U_i) < \varepsilon$　としてよい.

$h_0 = id_X$ とおき. induction によって homeomorphism の sequence $(h_j : X \to X)_{j=0}^{\infty}$ を構成する.

Step 0　(1)′ ~ (3)′ を $h_0 = id$ に用いて.　$h_1 : X \to X$ を

(1.1)　$h_1 | X - U_1 = id$.　　(1.2)　$\mathrm{diam}_X\, h_1(\Delta_1) < \varepsilon/4$
(1.3)　$\mathrm{diam}_X\, h_1(D) < (\varepsilon/4) + \mathrm{diam}_X D \quad \forall D \in \mathcal{D}$

をみたす様にとる.

(1.2) と $\mathcal{D}$ の upper semicontinuity から.　Δ_1 の $\mathcal{D}$-saturated closed nbd $Q_1 \subset U_1$ を

(1.4)　$D \in \mathcal{D} \quad D \subset Q_1 \Rightarrow \mathrm{diam}_X\, h_1(D) < \varepsilon$　ととる。

$h_2 : X \to X$ を次の様に構成する：

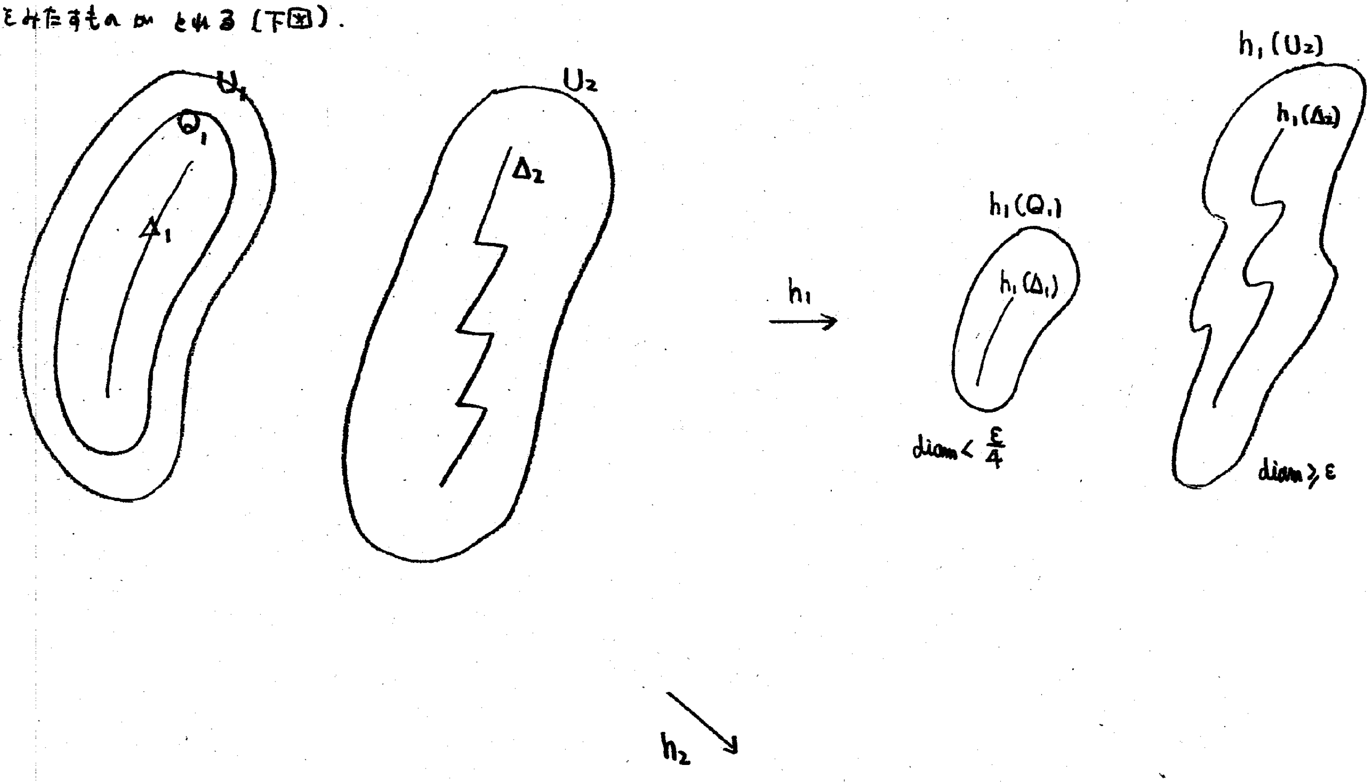
$h_1(\Delta_2) < \varepsilon$ なら $h_2 = h_1$ とする.

$h_1(\Delta_2) \geq \varepsilon$ なら. (1.4) から $\Delta_2 \not\subset \Theta_1$, Θ_1 が $\mathfrak{D}$-saturated だから. $\Delta_2 \cap \Theta_1 = \emptyset$.
特に $U_1 \cap U_2 = \emptyset$

h_1 に対して (1)'~(3)' を用いると. $h_2 : X \to X$ として.

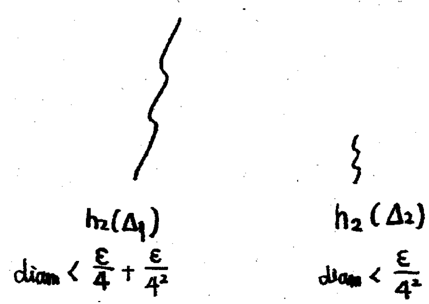
(2.1) $h_2 | X \setminus U_2 = h_1 | X \setminus U_2$ 特に $h_2 | \Theta_1 = h_1 | \Theta_1$
(2.2) $\operatorname{diam}_X h_2(\Delta_2) < \varepsilon / 4^2$
(2.3) $\operatorname{diam}_X h_2(D) < (\varepsilon/4^2) + \operatorname{diam}_X h_1(D) \quad \forall D \in \mathfrak{D}$

をみたすものがとれる(下図).



(2.2) と $\mathfrak{D}$ の upper semicontinuity から.
Δ_2 の $\mathfrak{D}$-saturated nbd Θ_2 を
(2.4)
$\operatorname{diam}_X h_2(\Theta_2) < \dfrac{\varepsilon}{4^2}$ をみたすようにとる.

$\Theta_2 \subset U_2$.



これをくり返して. $h_j : X \to X$ と $\mathfrak{D}$-saturated closed nbd Q_j of Δ_j を

(a_j) $h_j | X - U_j = h_{j-1} | X - U_j$.

(b_j) $\mathrm{diam}_X\, h_j(\Delta_j) < \varepsilon$

(c_j) $\forall D \in \mathfrak{D}$ $\mathrm{diam}_X\, h_j(D) < (1 - \frac{1}{2^j}) \frac{\varepsilon}{2}$

(d_j) $Q_j \subset U_j$, $D \subset Q_j$, $D \in \mathfrak{D} \Rightarrow \mathrm{diam}_X\, h_j(D) < \varepsilon$

(e_j) $h_{j+1} | Q_1 \cup \cdots \cup Q_j = h_j | Q_1 \cup \cdots \cup Q_j$

(f_j) $\mathrm{diam}_X\, h_{j-1}(\Delta_j) < \varepsilon \Rightarrow h_j = h_{j-1}$.

とみたすようにとれる.

Step 3. $N_{\mathfrak{D}(\geq \varepsilon/2)} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathrm{Int}\, Q_j$ だから $N_{\mathfrak{D}(\geq \varepsilon/2)}$ の compactness より.

$N_{\mathfrak{D}(\geq \varepsilon/2)} \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} Q_j$ とみたす k をとる.

$h_k : X \longrightarrow X$ を考えよう

$D \in \mathfrak{D}$ で $\mathrm{diam}_X D \geq \varepsilon/2$ であるものに対して, $D \subset Q_1 \cup \cdots \cup Q_k$.

$D \in Q_i$ とすると. (d_i) から $h_i(D) < \varepsilon$. $(e_{i+1}) \sim (e_k)$ から $h_k(D) = h_i(D) < \varepsilon$.

$D \in \mathfrak{D}$ $\mathrm{diam}_X D < \varepsilon/2$ であるものに対して $(c_1) \sim (c_k)$ から $\mathrm{diam}_X\, h_k(D) < \varepsilon$.

従って h_k が求める shrinking homeo. であることがわかった. //

Remark.10

Theorem 6 の証明 Step 1 において Hausdorff metric についての収束 に関する結果を用いた.

X : a locally compact separable metric with metric d

K, L : compact subset of X.

$d_H(K,L) = \inf\{\varepsilon>0 \mid K \subset N(L:\varepsilon),\ L \subset N(K:\varepsilon)\}$ とおくと.

d_H は X の nonempty compact subset の全体 $\mathcal{C}(X)$ 上の metric を与え, これを Hausdorff metric という.

Fact 1. $(\mathcal{C}(X), d_H)$ は complete metric space である. X が compact なら $(\mathcal{C}(X), d_H)$ も compact である.

Fact 2.
$\mathcal{D}$ を X の usc decomposition. $(\Delta_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ $\quad \Delta_i \xrightarrow{d_H} K$ (a compact) とする.

このとき. $^{\exists}\Delta \in \mathcal{D}$ s.t. $K \subset \Delta$.

proof. $\lim_{i\to\infty} \Delta_i = $ a pt なら明らかだから. そうでないとする.

もし $K \cap \Delta \neq \phi \neq K \cap \Delta'$ $\quad \Delta, \Delta' \in \mathcal{D}$ をみたす Δ, Δ' があったら.
$\Delta \cap \Delta' = \phi$ だから
Δ の saturated nbd U, Δ' の saturated nbd U' を $U \cap U' = \phi$ととれる.

$\Delta i \xrightarrow[d_H]{} K$ だから 十分大きな i に対して

$\Delta_i \cap U \neq \phi \neq \Delta_i \cap U'$ が成り立たなければならないが, これは U, U' が saturated nbds であることに反する. //