M. Freedman §7 についての ノート.

このノートは Freedman の論文 §7 "A short course in Bing topology" を読むために作ったものです.

Theorem 7.1, 7.2, 7.4 について 詳しい証明を与えてみました. Freedman の説明は分かりづらいのですが、幸いにして 現在では とても良い本が 出版されています.

AMS から

[1]: R. Daverman, Decompositions of Manifolds Academic Press 1986. (最近復刊されました).

このノートは, 上の本の中から, Freedman の Theorem 7.1, 7.2, 7.4 に当たる定理の証明を (下手に) 書き写したものに過ぎません.

Theorem 7.3 については 省略させていただきましたこと、どうかお許し下さい. また TeX 原稿を作ることができず, 手書きの読みにくいものになってしまったこと、申し訳ありません.

この会にお誘いいただいた山田裕一先生に厚く御礼申し上げます。本当に有難うございました

筑波大学 数理物質科学研究科 数学専攻

川村 一宏

Freedman Chap 7 A short course in Bing topology

Reference

[1] R. J. Daverman, Decompositions of manifolds Academic Press 1986

[2] T. B. Rushing, Topological embeddings Academic Press 1973

[3] J van Mill, Infinite-dimensional Topology, Prerequisites and Introduction, North-Holland 1988.

§1 Backgrounds

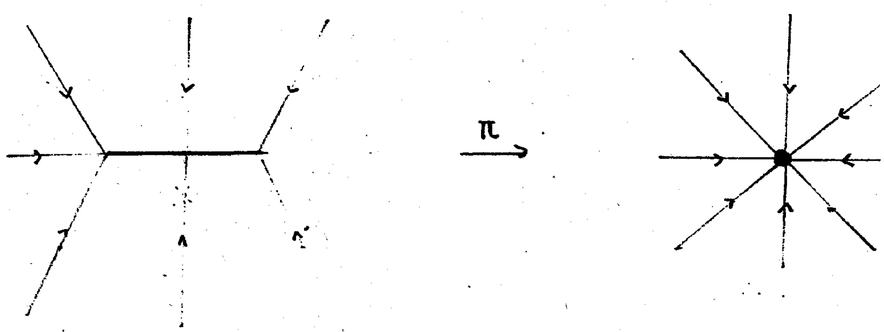
X : a compact subset of $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n / X$ = X を一点に縮めた quotient space.

$\mathbb{R}^n / X \approx \mathbb{R}^n$ が成立するのは どの様なときか ?

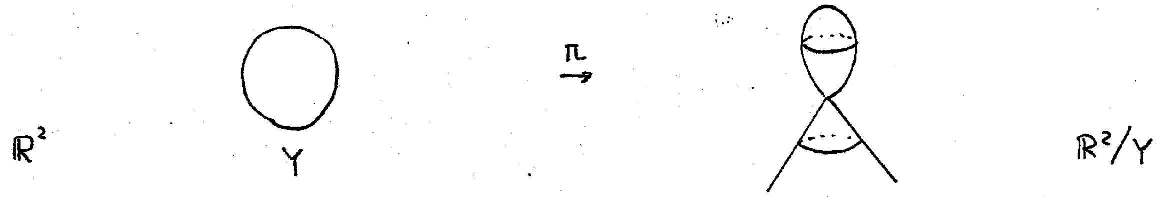
Example 0.

1) $X = [0,1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ $\qquad \mathbb{R}^2 / X \approx \mathbb{R}^2$

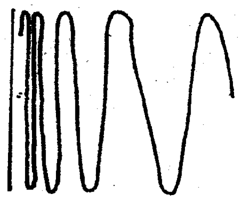


$\mathbb{R}^2 \qquad \approx \qquad \mathbb{R}^2 / X$

2) $Y = S^1 \subset \mathbb{R}^2$ $\qquad \mathbb{R}^2 / Y \not\approx \mathbb{R}^2$



3)

$X =$  $:= \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid 0 < x \le 1\} \cup \{(0,y) \mid -1 \le y \le 1\}$.

$$\mathbb{R}^2/X \approx \mathbb{R}^2.$$

上の例から：

∘ $\mathbb{R}^n/X \approx \mathbb{R}^n$ が 成立する様な X は、$\mathbb{Z}$-係数 Čech cohomology が 自明であることが多い。 そのような X について homeomorphism $\mathbb{R}^n/X \approx \mathbb{R}^n$ は projection

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^n/X$$

を modify することによって 得られ(そうである)る。

これを裏付けるのが 次の定理である。

Def. 1. M^n : a topological manifold X : a compact subset of M^n.

X is cellular in M^n $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists (D_i)_{i=1}^{\infty}$ a sequence of n-balls of M s.t.

1) $D_1 \supset \mathring{D}_1 \supset D_2 \supset \cdots \supset D_i \supset \mathring{D}_i \supset D_{i+1} \supset \cdots$

2) $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$

Remark. "cellularity" は X 自身の topology だけでなく、X の M^n への埋め込まれ方も規定している。 上の Example 1) 3) は cellular set の例である。

Theorem2 ([2. Theorem 1.8.1, Cor. 1.8.1 p.44], Freedman p.415 Observation 7.2)

X : a compact subset of $\mathbb{R}^n$.

・ $\mathbb{R}^n/X \approx \mathbb{R}^n \iff X$ is cellular in $\mathbb{R}^n$.

proof.

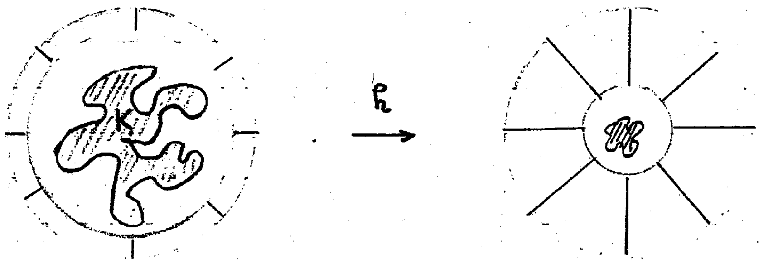
$\Rightarrow$ $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \underset{\approx}{\overset{\mathbb{R}^n}{}}\mathbb{R}^n/X$ を projection として、 $\pi(X) = \{p\}$ とおく。 standard ball の decreasing sequence $B_1 \supset \mathring{B}_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \{p\}$ をとり、

$D_i = \pi^{-1}(B_i)$ とおくと、 generalized Schöenflies Theorem より D_i も ball で $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$ をみたす。//

$\Leftarrow$ X に対して cellularity の条件をみたす (D_i) をとる.

Lemma 3. D: an n-cell. K: compact $\subset \mathring{D}$ とする。

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists h: D \longrightarrow D$ a homeomorphism s.t. $h | \partial D = id$
diam $h(K) < \varepsilon$.



上の Lemma を $D_2 \subset D_1$ に apply:

$\exists h_2 : D_1 \longrightarrow D_1$ s.t. $h_2 | \partial D_1 = id$.
diam $h_2(D_2) < 1/2$.

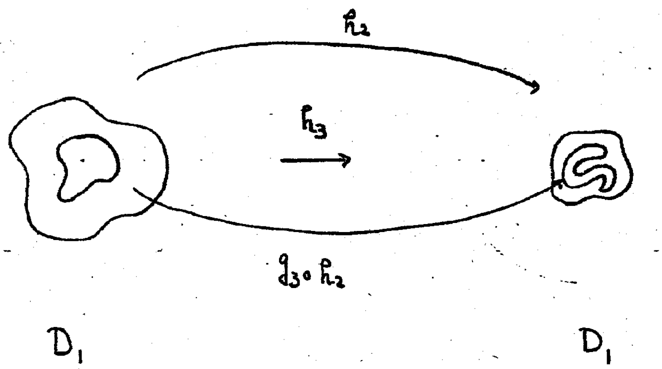
次に $h_2(D_3) \subset h_2(D_2)$ に apply:

$\exists g_3 : h_2(D_2) \to h_2(D_2)$ s.t. $g_3 | \partial h_2(D_2) = id$
diam $g_3 h_2(D_2) < 1/4$.

$h_3 : D_1 \longrightarrow D_1$ を次で定める:

$h_3 | D_1 \setminus D_2 = h_2$

$h_3 | D_2 = g_3 \circ h_2 | D_2$. h_3 は homeo.



これを繰り返して homeo. の sequence

$(h_i : D_1 \longrightarrow D_1)_{i=1}^{\infty}$ を

(i.1) $h_i \,|\, D_1 \setminus D_{i-1} = h_{i-1}$

(i.2) $\mathrm{diam}\ h_i(D_i) < 1/2^i$ 　　をみたす様にとれる.

(i.1), (i.2) を合わせると. 　$h := \lim_{i\to\infty} h_i$ が存在して. (homeo ではない)

$h(X) = \{p\}$: a point , $h^{-1}(p) = X$ がわかる.

$h \,|\, \mathbb{R}^n \setminus D_1 = id$ とすることによって、map. $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ がえられる.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{R}^n \\
& \mathbb{R}^n/X \arrow[ur, dashed, "\tilde{h}"'] &
\end{tikzcd}$$

$h(X) = p$ & $h^{-1}(p) = X$ だから.

h は $\tilde{h} : \mathbb{R}^n/X \to \mathbb{R}^n$ を誘導し、$\tilde{h}$ は homeo. である。 //

次に $\mathbb{R}^n$, より一般に topological manifold M^n 内に いくつか (一般には無限個) の closed set $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ を取り.

$\mathbb{R}^n$ (or M^n) から. 各 X_α をそれぞれ一点に縮めて得られる商空間 $\mathbb{R}^n$ (or M^n) $/\{X_\alpha\}$ を考えたい.

Q.4 どの様な条件の下で $\mathbb{R}^n$ (resp. M^n) $/\{X_\alpha\} \approx \mathbb{R}^n$ (resp. M^n) が成立するか?

4-1) $\mathbb{R}^n$ (or M^n) $/\{X_\alpha\}$ は metrizable か? 有限次元か? (point-set topology)
locally compact か?

4-2) 〃 topological manifold か? ("Bing topology")

4-3) 〃 $\mathbb{R}^n$ (or M^n) と homeo か? (〃).

Def. 5. M^n : a topological manifold.

$\mathcal{D}$: a collection of closed sets s.t. (i) $g_1 \neq g_2 \in \mathcal{D}$ $g_1 \cap g_2 = \emptyset$

(ii) $\bigcup \mathcal{D} = M^n$

を M^n の decomposition という. $M^n/\mathcal{D}$ で 各 $g \in \mathcal{D}$ をそれぞれ1点に縮めた quotient space (the decomposition space) を表わし.

$\pi : M^n \longrightarrow M^n/\mathcal{D}$ を canonical projection とする。.

例えば Theorem 2 の状況では

$\mathcal{D} = \{X\} \cup \{\{y\} \mid y \in \mathbb{R}^n \setminus X\}$ である。

4-1) point-set topology

(i) $\mathfrak{D}$ の member は compact でなければならない.

e.g. $\mathbb{R}^2 / \mathbb{R}^1 \times \{0\}$ は metrizable でない. (第1可算でないから).

(ii) 一般に次が成立する (付記 2), 4) 参照)

$f: X \twoheadrightarrow Y$ a closed continuous surjection s.t. $f^{-1}(y)$ compact $\forall y \in Y$
これは proper map となる

X: locally compact separable metrizable $\Rightarrow$ Y も locally compact separable metrizable

そこで, projection $\pi: M \longrightarrow M/\mathfrak{D}$ が proper map であることを要請する.
(i) から π の fiber の compactness は既に要請されているから. π が closed map であることを保証すればよい.

Def. 6. decomposition $\mathfrak{D}$ が upper semi continuous (usc) であるとは,

$\forall g \in \mathfrak{D}$ $\forall U$: open nbd of g $\exists V$: an open nbd of g s.t.

(1) $g \subset V \subset U$

(2) V は $\mathfrak{D}$ の member の union (i.e. $\exists \mathfrak{D}' \subset \mathfrak{D}$ s.t. $V = \cup \mathfrak{D}'$)
(いくつかの)
このとき V は $\mathfrak{D}$-saturated であるという
(Freedman p.414)

すると,

$\pi: M \longrightarrow M/\mathfrak{D}$ が closed $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{D}$ usc (同上).
付記 5) 参照

そこで以下 decomposition $\mathfrak{D}$ は全て usc かつ, $\mathfrak{D}$ の member は全て compact と仮定する.

このとき $M/\mathfrak{D}$ は locally compact separable metrizable space である.
↑
(M の local compactness, separability から)

(iii) $M/\mathfrak{D}$ の 有限次元性 について.

point set topology における問題 であるように見えるが. 実は geometric topology の 問題 である。 Freedman の 論文においては この条件は 常にみたされていることと、私の勉強不足から ここでは 立ち入{ら/れ}ない.

4-2), 3) について：

上の設定の下で. $\pi: M^n \longrightarrow M/\mathfrak{D}$ は proper map, $M/\mathfrak{D}$ は finite dimensional locally compact separable metrizable space であった。 ここで $M/\mathfrak{D}$ は更に locally contractible であると仮定する.

冒頭の例 Example 0 (2) からわかるように. $\mathfrak{D}$ の member が nontrivial topology をもてば $M/\mathfrak{D}$ は topological manifold になりえない. CW complex における contractibility を compact metrizable space に拡張した概念が cell-like-ness である.

Def. 7 X : a compact metrizable space.

$$X \text{ is cell-like} \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall e: X \longrightarrow P^{\text{ANR}} \text{ embedding に対して 次が成りたつ：}$$

$$\forall U: \text{open nbd of } e(X) \qquad e(X) \simeq 0 \text{ in } U.$$

X として finite dim'l compact だけを考えるなら, "P が ANR である" ことの 定義に 煩わされる必要はなく, P は 十分高い次元の Euclidean space $\mathbb{R}^N$ の standard triangulation に関する polyhedron と 考えておいても大体 よい.

metrizable space に限って、定義を与えておく.

Def. 8. metrizable space Y が ANR (= Absolute Neighborhood Retract) であるとは.

任意の metrizable space X と, X の任意の closed set A, 任意の $f: A \longrightarrow Y$ に対し, A の nbd U と f の U への extension $\bar{f}: U \longrightarrow Y$ が存在すること：

$$\begin{tikzcd}
\forall X & & \\
& \exists U \arrow[dr, dashed, "\exists \bar{f}"] & \\
\forall A \arrow[uu, "\text{closed}"] \arrow[ur] \arrow[rr, "\forall f"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

Y が $\mathbb{R}^N$ の subpolyhedron なら、Tietze の拡張定理から Y が ANR であることがわかる。Topological manifold も ANR であることが知られている（が 三角形分割できない top. mfd. もあるから，上ほど明らかではない）．

より大切なことは「cell-like-ness を判定するには，1つの埋め込みについて条件を確かめればよい」ということである．

Prop. 9 （付記 3）参照） X : compact metrizable とする．

X : cell-like $\iff$ $\exists\, e : X \longrightarrow P^{ANR}$ an embedding s.t.

$\forall U$: open nbd of $e(X)$ $\quad e(X) \simeq 0$ in U

$\iff$ $\exists\, e : X \hookrightarrow P^{ANR}$ an embedding s.t.

$\forall U$: open nbd of $e(X)$ $\quad \exists V$: an open nbd of $e(X)$ s.t.

$V \subset U$ & $V \simeq 0$ in U.

従って
cell-likeness は X の位相についての性質であって，X の ANR への埋め込みには依存しない．

一方 cellularity （Def 1, p. 2） は X の埋め込みに関する条件である。

上の Prop. 9 と Def. 1 を見比べれば

compact metric space X が cellularly embedded in a topological manifold M

$\Downarrow$

X is cell-like

逆に cell-like compactum X が topological manifold M^n に入っているとき，その埋め込みは cellular か？ $n \leq 2$ なら正しい．$n \geq 3$ に対しては：

Theorem 10 （McMillan Ann. Math. 79 (1964)） X : cell-like compact $\subset M^n$ a topological manifold.

$n \geq 5$ とする． X が cellular $\iff$ $\forall U$: nbd of X in M $\quad \exists V$: a nbd of X in M with $V \subset U$ s.t.

$$\pi_1(V \setminus X) \longrightarrow \pi_1(U \setminus X) = 0.$$

(the cellularity criterion)

残ったのは $n=3,4$ のとき。 $n=4$ のとき解決したのが Freedman の Theorem 1.11.
$n=3$ については $M=\mathbb{R}^3$ について正しいことが知られている。「全ての 3-manifold に対し Theorem 10 が成り立つ」
$\Downarrow$
Poincaré conj. が正しい。

Theorem 11. Freedman (Theorem 1.11, p.373).
Theorem 10 は $n=4$ でも成り立つ。

Remark. Freedman は "X が cell-like" よりも弱く "$\check{H}_*(X;\mathbb{Z})=0$" の仮定の下で
成り立つと述べているが、これは正しくない。
cf. D. Repovš, A criterion for cellularity in a topological 4-manifold,
PAMS 100, No.3 (1987), 564-566.

(但し上の論文の Remark 1' は説明不足と思われる).

そこで decomposition $\mathcal{D}$ の各 member は cell-like (あるいは cellularity embedded compact) と
しよう。この様な decomposition を cell-like decomposition (あるいは cellular decomposition) という。

そしてこの様な decomposition $\mathcal{D}$ に対して

4-2) $M/\mathcal{D}$ は topological manifold か?

4-3) $M/\mathcal{D} \approx M$ か?

を再考する。次の定理は上の2つの問題は密接に関係していることを示している。

Theorem 12 (Siebenmann Topology 11 (1972), 271-294).

$f: M^n \longrightarrow N^n$ a continuous surjection between closed manifolds M^n, N^n.
s.t $\forall y \in N^n$ $f^{-1}(y)$ cell-like

$\hookrightarrow$ この性質をもつ map を cell-like map という

$n \geq 5$ なら f は homeomorphism によっていくらでも近く近似できる: i.e.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists h: M^n \to N^n \text{ a homeo. s.t } d(f,h) := \sup\{d(f(x), h(x)) \mid x \in M\} < \varepsilon.$$

Remark. 上の定理は $n \leq 2$ なら成り立つ。
$n=3$ なら "cell-likeness" を "cellularity" に置き換えて成り立つことが示されている
(Armentrout TAMS 133 (1968), 307-332)

$n=4$ のとき 恐らく Freedman の結果を受けて Quinn によって示されている.
(Quinn, Ends of maps III, Dimension 4 and 5 J.Diff.Geom. 17 (1982), 503–521)

以上の準備の下で ようやく Freedman, Chap. 7 における 基本的定義を述べられる:

Def. 13. (Freedman, p.413).

$f: X \to Y$ を locally compact separable metric space の間の proper surjection とする.

f が ABH (= Approximable By Homeomorphism) である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon: X \to (0,\infty)$ (小さい値をとる関数を想定している)
$\exists h: X \longrightarrow Y$ a homeo. s.t. $\mathrm{dist}_Y(f(x), h(x)) < \varepsilon(x)$ $\forall x \in X$

$\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon': Y \to (0,\infty)$ $\exists h: X \to Y$ a homeo. s.t. $\mathrm{dist}_Y(f(x), h(x)) < \varepsilon'(f(x))$ $\forall x \in X$.

上述の Siebenmann の論文
p.283, Lemma 3.1 による.

Non-compact space を考察するときの常として, "近さ" を考える際には 空間全体で一様な constant を考えることは不適切, それが 上で majorant function ε, ε' を考える理由である.