§3 Whitehead continuum Wh and manifold factors.

J.H.C. Whitehead は contractible open 3-manifold M で $\mathbb{R}^3$ と homeo. でないものを構成する過程で 現在 Whitehead continuum Wh と呼ばれる compact connected set $\subset \mathbb{R}^3$ を見い出した（J.H.C. Whitehead, A certain open manifold whose group is unity Quat. J. Math. Oxford 6 (1935), 268-279).

上の M の構成法は、例えば J. Hempel, 3-Manifolds Ann. Math. Studies, Princeton 1976 p. 156-157 参照.

Wh は cell-like compact set であるが $\mathbb{R}^3$ 内で <u>cellular でない</u>. 実際 $\mathbb{R}^3/Wh$ は manifold ではない. 一方で

$$(\mathbb{R}^3/Wh) \times \mathbb{R}^1 \approx \mathbb{R}^4$$

という著しい性質をもつ. Freedman §8 において、この例が大切な役割を果たすので、再び [1] に従って Wh について述べる.

一般に $X \times \mathbb{R}$ が topological manifold なら、X は homology manifold である. 即ち:

Prop. 1. $X \times \mathbb{R}$ が ANR homology $(n+1)$-manifold なら、X は ANR homology n-manifold である。

ここで ANR homology n-manifold とは、locally compact separable metrizable ANR Y で

$$H_*(Y, Y-\{y\}) \cong H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n-0) \qquad (H_*(\cdot) \text{ は } \mathbb{Z} \text{ 係数 singular homology}).$$

をみたすもののこと.

ANR Y は locally contractible で、CW complex と同じ homotopy type をもつから、singular homology が "適切な" homology theory である.

Prop 1 を示すには、$(x,t) \in X \times \mathbb{R}$ に対して、nbd $U \times (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ をとり、

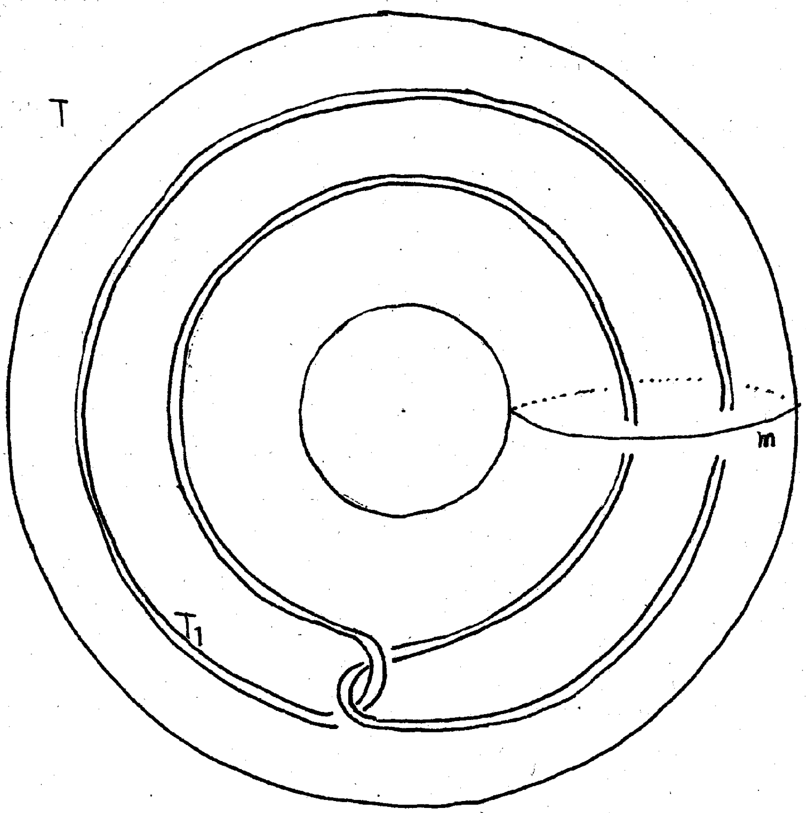
$$\begin{aligned}
H_*(X\times\mathbb{R}, X\times\mathbb{R}-(x,t)) &\underset{\text{excision}}{\cong} H_*(U\times(t-\varepsilon,t+\varepsilon), U\times(t-\varepsilon,t+\varepsilon)-(x,t)) \\
\cong\; H_*(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1}-0) \qquad &\cong H_*((U, U-x)\times((t-\varepsilon,t+\varepsilon)-t)) \\
&\underset{\text{Künneth}}{\cong} H_*(U, U-x) \otimes \underbrace{H_*((t-\varepsilon,t+\varepsilon),(t-\varepsilon,t+\varepsilon)-t)}_{\text{torsion free}}
\end{aligned}$$

から $H_*(X, X-x) \cong H_*(U, U-x) \cong H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n-0)$ を導けばよい. //

従て $\mathbb{R}^3/Wh$ は topological manifold でない homology manifold の例でもある.

Def 2 (Whitehead continuum)

$\mathbb{R}^3$ 内の standard solid torus T の内部に図の様な solid torus T_1 をとる。



$T_1 \simeq 0$ in T に注意.
homotopic

もちろん T_1 は nontrivial knot の regular nbd である.

solid torus $T_2 \subset \mathrm{Int}\, T_1$ を

$(T_1, T_2) \approx (T, T_1)$ をみたす様にとり,
⋮
と続けて.
$(T_{j+1}, T_j) \approx (T, T_1)$ をみたす solid tori の列

$T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset \cdots$ をとり,

$Wh := \bigcap_{i=1}^{\infty} T_i$ とおく.

(2.1) Wh は cell-like である (§1. Def.7 p.1.7)

proof.

§1 Prop 9 から Wh の cell-likeness を示すには T において Def.7 の条件を確かめれば十分である.

Wh の任意の nbd U に対して大きな j をとって $T_j \subset U$ とする. $Wh \subset T_{j+1} \subset T_j$ かつ

$(T_{j+1}, T_j) \approx (T_1, T)$, $T_1 \simeq 0$ in T から $Wh \simeq 0$ in $T_j \subset U$. //

(2.2) Wh は cellular でない.

proof. もし Wh が cellular なら, §1, Theorem 2 から $\mathbb{R}^3/Wh \approx \mathbb{R}^3$ である. 従て

projection

$\pi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3/Wh$ において $\pi(Wh) := w$ とおくと, w の nbd U で $U \approx \mathbb{R}^3$ であるものをいくらでも小さくとれる

よって w の nbd の sequence

$$U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \cdots \supset \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k = \{w\} \text{ を}$$

$$\pi_1(U_j \setminus U_{j+1}) \longrightarrow \pi_1(U_j \setminus \{w\}) = 0$$ をみたす様にとれるはずだが.

それは Wh の construction から不可能である. //

以下 次の定理の証明を目標とする.

Theorem 3 $(\mathbb{R}^3/Wh) \times \mathbb{R}^1 \approx \mathbb{R}^4$. (Freedman Theorem 7.4 と本質的に同じ).

まず $\mathbb{R}^4$ の decomposition $\mathcal{D}$ を

$$\mathcal{D} = \{ Wh \times \{t\} \mid t \in \mathbb{R}^1 \} \cup \{ \{x\} \mid x \notin Wh \times \mathbb{R} \}$$ とおく. 定義から

$(\mathbb{R}^3/Wh) \times \mathbb{R}^1 \approx \mathbb{R}^4/\mathcal{D}$ であるから. §2, Theorem 2 (p.2.2, ABH ⟺ BSC) より.

$\mathcal{D}$ が shrinking criterion をみたすことを示せばよい. $Wh = \bigcap_{i=1}^{\infty} T_i$ と表わされていることと, decomposition が特別な形としていることに注意すると, ($\mathbb{R}^4$ が noncompact であるにも拘らず) error function ε を constant とした 次の Prop. を示せば十分である.

Prop 4. $\forall \varepsilon > 0$ $\forall k \geq 1$. $\exists h : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a homeo. s.t.

(1) $h | (\mathbb{R}^3 - T_k) \times \mathbb{R}^1 = id$.

(2) $h(T_k \times \{t\}) \subset T_k \times [t-\varepsilon, t+\varepsilon]$

(3) diam $h(Wh \times \{t\}) < \varepsilon$. $\forall t \in \mathbb{R}^1$. ([1] p.81, Theorem 1).

上を示すため, Andrews-Rubin による次の Lemma を用いる:

Lemma 5 ([1], p.81-83, Lemma 2). $T = D^2 \times S^1$ を solid torus, $Q \subset \mathrm{Int}\, T$ を finite polyhedron で $j : Q \hookrightarrow T \simeq 0$ をみたすものとする. このとき,

$\exists \alpha > 0$ $\exists f : T \times \mathbb{R}^1 \longrightarrow T \times \mathbb{R}^1$ a homeo s.t.

(1) $f | \partial D^2 \times S^1 \times \mathbb{R}^1 = id$. (2) $f(T \times \{t\}) \subset T \times [t-\alpha, t+\alpha]$

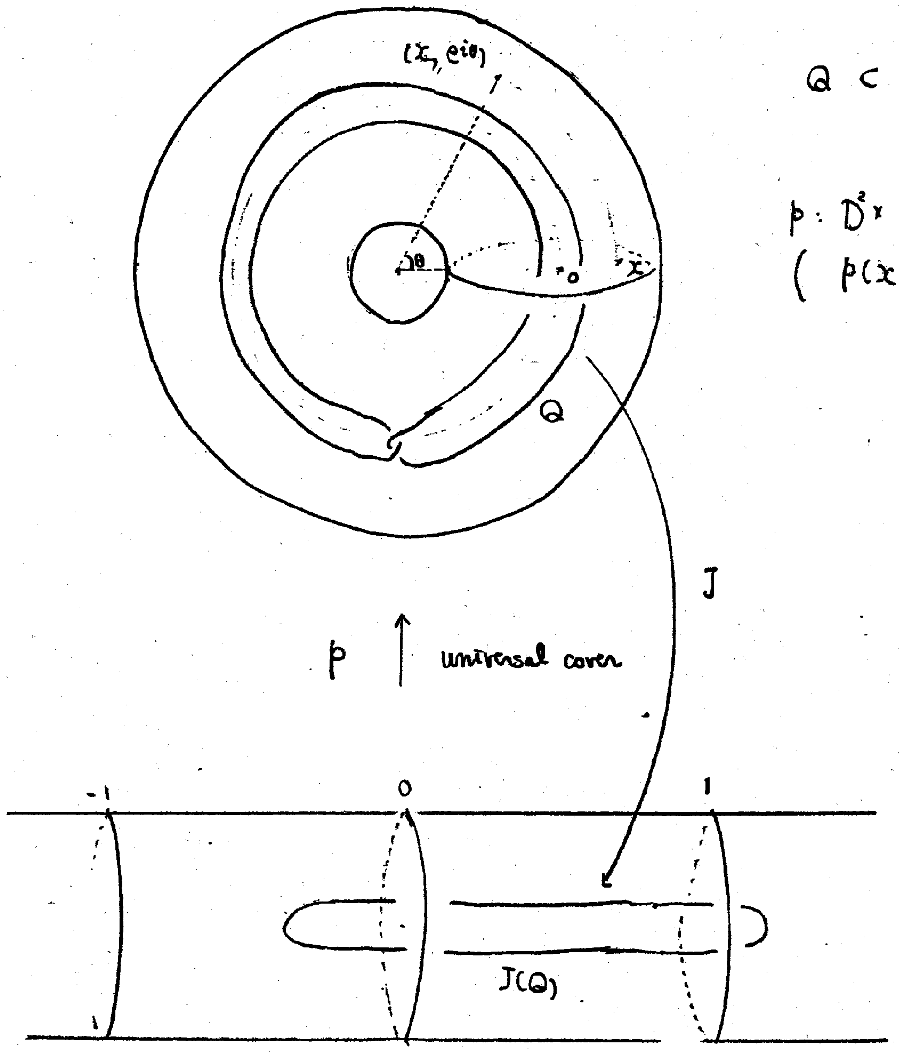
(3) $f(Q \times \{t\}) \subset D^2 \times \{\text{a point}\} \times [t-\alpha, t+\alpha]$.

Proof. $D^2=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|\le 1\}$, $S^1=\{e^{i\theta}\mid \theta\in\mathbb{R}\}$ とみなし.

$D^*=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\le 1/2\}$ とおく.

$Q\subset D^*\times S^1\subset D\times S^1 = T$ としてよい.

$p: D^2\times\mathbb{R}^1 \longrightarrow D^2\times S^1$ を universal cover とする
($p(x,\theta)=(x,e^{i\theta})$, $(x,\theta)\in D^2\times\mathbb{R}^1$)



$D^2\times\mathbb{R}^1$
(本来は"縦長"に描くべきです)

$j: Q \hookrightarrow T \simeq 0$ だから. j の lift $J: Q\to D^2\times\mathbb{R}^1$ を一つ取って固定する.

$J(x,s)=(x,w(x,s))$ $\quad(x,s)\in Q\subset D^2\times S^1 = T$ とおくと. $p\circ J = j$ は

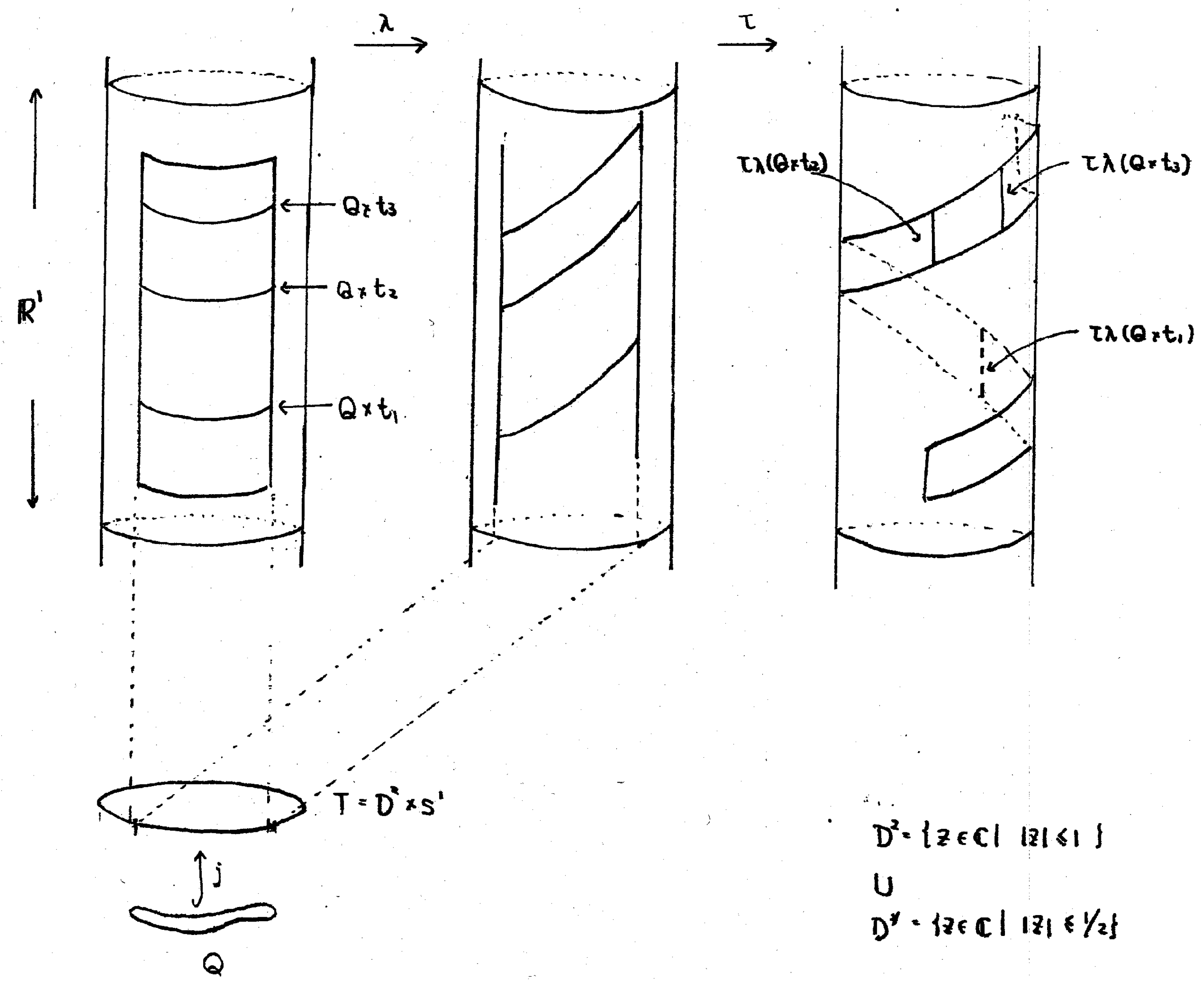
(*) $e^{iw(x,s)} = s$ $\quad(x,s)\in Q$ と書き直すことができる.

(**) $w(Q)\subset[-\alpha,\alpha]$
をみたす $\alpha>0$ をとって w の extension

$\psi: T\longrightarrow[-\alpha,\alpha]$ $\quad\psi|\partial D^2\times S^1\equiv 0$
$\psi|Q = w$ をとる

$f: T\times\mathbb{R}^1 \longrightarrow T\times\mathbb{R}^1$ で (1)〜(3) をみたすものを構成するため、次の2つの homeo.

$\lambda: T\times\mathbb{R}^1 \longrightarrow T\times\mathbb{R}^1$, $\tau: T\times\mathbb{R}^1 \longrightarrow T\times\mathbb{R}^1$ を考え、$f = \tau\circ\lambda$ とする.



$D^2 = \{z\in\mathbb{C} \mid |z|\le 1\}$
$\cup$
$D^* = \{z\in\mathbb{C} \mid |z|\le 1/2\}$

λの def:

$$\lambda: T\times\mathbb{R}^1 = D^2\times S^1\times\mathbb{R}^1 \longrightarrow D^2\times S^1\times\mathbb{R}^1 = T\times\mathbb{R}^1$$

$$\lambda((x,s),t) := ((x,s),\ \psi(x,s)+t) \qquad (x,s)\in D^2\times S^1,\quad t\in\mathbb{R}^1.$$

つまり、λ は "水平レベル" $T\times t$ を "斜めに lift" する homeo である。

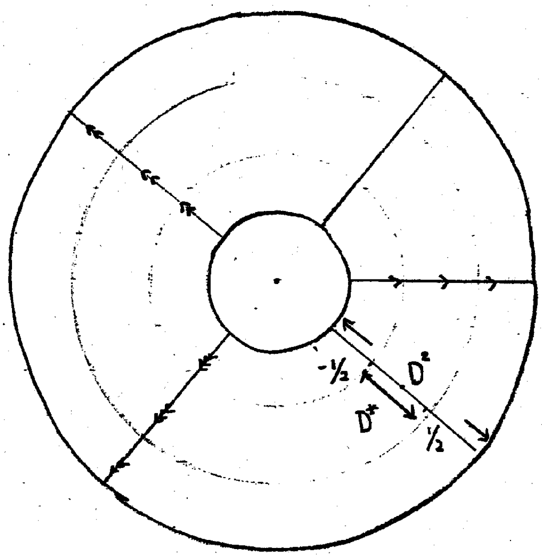
τ の def.

$\tau: D^2\times S^1\times\mathbb{R}^1 = T\times\mathbb{R}^1 \longrightarrow T\times\mathbb{R}^1 = D^2\times S^1\times\mathbb{R}^1$ は、水平レベル $T\times t$ を保つ。
$T\times t = D^2\times S^1\times t \longrightarrow T\times t = D^2\times S^1\times t$ は $D^2\times S^1$ 上の twist を行う。具体的には:

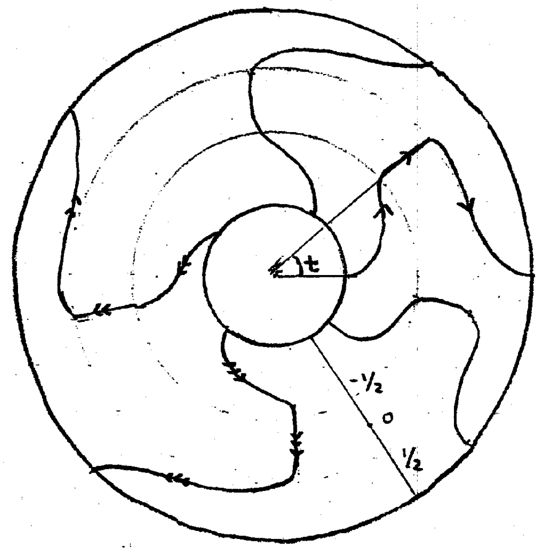
$$\tau((x,s),t) = (\tau_t(x,s),t) \qquad (x,s)\in D^2\times S^1,\quad t\in\mathbb{R}^1, \quad \text{ここで}$$

$$\tau_t(x,s) = \begin{cases} (x,\ s e^{-2it(1-|x|)}) & (x,s)\notin D^*\times S^1 \\ (x,\ s e^{-it}) & (x,s)\in D^*\times S^1. \end{cases}$$

(次ページの図)



$\xrightarrow{\tau_t}$



$D^2 \times S^1$

$D^2 \times S^1$
（本当は右回りのtwist）

$f = \lambda \circ \tau$ が (1)〜(3) をみたすことを確めよう：

(1) $((x,s),t) \in \partial D^2 \times S^1 \times \mathbb{R}^1$ とする.

$$\begin{aligned} f((x,s),t) &= \tau\lambda((x,s),t) \quad \big\downarrow\ \psi(x,s)=0 \\ &= \tau((x,s),\ t) \quad \big\downarrow\ |x|=1 \\ &= ((x,\ s\,e^{-2\pi i t(1-1)}),\ t) = ((x,s),t) \end{aligned}$$

より O.K.

(2)
$$\begin{aligned} f(T\times\{t\}) &= \tau\lambda(T\times\{t\}) \quad \big\downarrow\ \psi(T)\subset[-d,d] \\ &\subset \tau(T\times[t-d,t+d]) \quad \big\downarrow\ \tau \text{ は } T\times\{t\} \text{ を保つから.} \\ &= T\times[t-d,t+d] \end{aligned}$$

より…

(3) $(x,s) \in Q$, $t \in \mathbb{R}^1$ に対して.

$$
\begin{aligned}
f((x,s),t) &= \tau\lambda((x,s),t) \\
&= \tau((x,s), t+\psi(x,s)) \qquad \wr\ (x,s) \in D^* \times S^1 \\
&= (x, se^{-i(t+\psi(x,s))}, t+\psi(x,s)) \\
&= (x, se^{-i\psi(x,s)}e^{-it}, t+\psi(x,s)) \qquad \wr\ \psi(x,s) = w(x,s) \\
&= (x, se^{-iw(x,s)}e^{-it}, t+w(x,s)) \qquad \wr\ (*) : e^{iw(x,s)} = s \\
&= (x, e^{-it}, t+w(x,s)). \in D^2 \times \{e^{-it}\} \times [t-d, t+d]
\end{aligned}
$$

i.e. $f(Q \times \{t\}) \subset D^2 \times \{e^{-it}\} \times [t-d, t+d]$. //

以上で Lemma 5 が証明された. //

Remark 6. Lemma 5 における $d>0$ は

$(**)$ $\quad w(Q) \subset [-d, d]$ $\quad$ (p.34)

をみたすものとして選ばれた. universal cover を与える map $p : D^2 \times \mathbb{R}^1 \to D^2 \times S^1$ を reparametrize して

$p_N(x,\theta) = (x, e^{iN\theta})$ $\quad$ (N は十分大きな正の数)

に対して 上の議論を繰り返せば d は望むだけ小さくできる.

最後に Prop. 4 を証明する.

$Wh = \bigcap_{j=1}^{\infty} T_j$, $\quad (T_j, T_{j+1}) \approx (T, T_1)$ であった.

$\varepsilon > 0$ と $k \geq 1$ に対して homeomorphism $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を

(1) $h \mid (\mathbb{R}^3 - T_k) \times \mathbb{R}^1 = id$

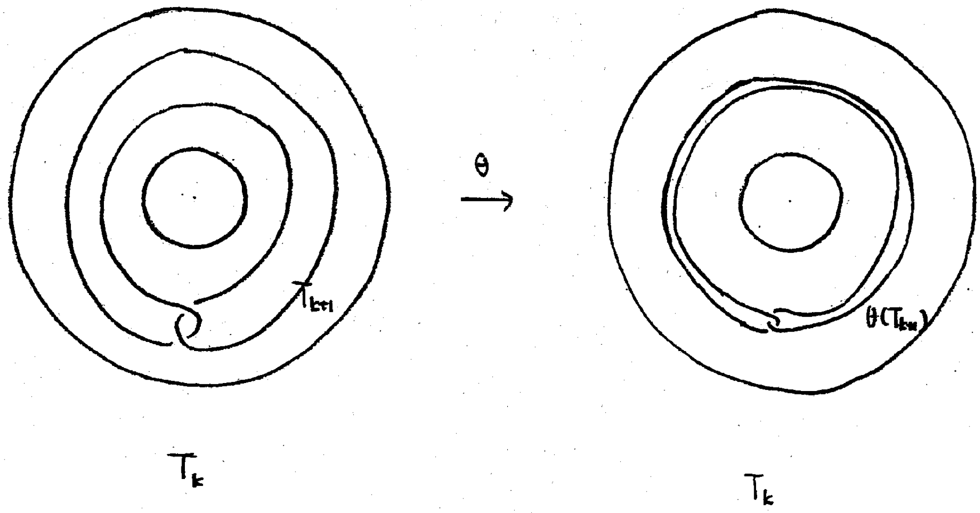
(2) $h(T_k \times \{t\}) \subset T_k \times [t-\varepsilon, t+\varepsilon]$

(3) $\operatorname{diam} h(Wh \times \{t\}) < \varepsilon \quad {}^\forall t \in \mathbb{R}^1$ $\quad$ をみたす様に見つけたい.

Lemma 5 を $T = T_k = D^2 \times S^1$, $Q = T_{k+1}$ として用いる. まず $\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a homeo with

$\theta | \mathbb{R}^3 - T_k = id$. $\theta(T_{k+1})$ は T_k の core に十分近く、

$^\forall$ meridian disk $D^2 \times \{s\}$ に対し diam $\theta(T_{k+1}) \cap (D^2 \times \{s\}) < \varepsilon/2$ としておく.



Lemma 5 から a homeo. $f : T_k \times \mathbb{R}^1 \longrightarrow T_k \times \mathbb{R}^1$ と $\alpha > 0$ で.

(4) $f | \partial T_k \times \mathbb{R}^1 = id$.

(5) $f(T_k \times \{t\}) \subset T_k \times [t-\alpha, t+\alpha]$

(6) $f(\theta(T_{k+1}) \times \{t\}) \subset D^2 \times \{\text{a point}\} \times [t-\alpha, t+\alpha]$

をみたすものがある. (4)とθの定義から. $f \circ \theta \times 1_{\mathbb{R}^1}$ は $\mathbb{R}^4$ 上の homeo $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ に自然に拡張できる。

Remark 6 より $0 < \alpha < \varepsilon$ としてよい. θ の取り方と Lemma 5 における f の構成から.

diam $(f(\theta(T_{k+1}) \times \{t\}) \cap D^2 \times \{\text{a point}\} \times \{t'\}) < \varepsilon/2$ $\quad \forall t' \in [t-\alpha, t+\alpha]$.

よって

(2) $h(T_k \times \{t\}) \subset T_k \times [t-\varepsilon, t+\varepsilon]$ $\quad \forall t \in \mathbb{R}^1$

(3) diam $h(Wh \times \{t\}) \leq$ diam $h(T_{k+1} \times \{t\}) \leq \left(\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \right)^{1/2} < \varepsilon$. $\quad \forall t \in \mathbb{R}^1$ が

えられた. //

付記

1) §7 における誤植 について、気付いた範囲で 訂正します。

p.416 line 5 "a" を除く。
Diagram 7.1 $i_0(S^1 \times D^2)$ は $i_2(S^1 \times D^2)$ に絡んでいるべき。

p.416 line 8 "compaction" → "a compactum" ?

p.420 Theorem 7.3 証明中の C の定義：

$$C = m^{-1}([3/4, 11/4] \cup [13/4, 21/4] \cup \cdots)$$

（たぶん）

p.421 lines 1〜4 AUC, BUC → $A \cup C$, $B \cup C$ （和集合）.

p.424 line 4 $D^2 \times S^1 \times [0, \sigma) / Wh \times [0, \infty)$

"∞" であるべき。

p.424-425 ２つの diagram を 交換する。

2) Proper map による metrizability の保存 (4-1) (ii) p. 1.6).

Prop. $f : X \twoheadrightarrow Y$ a proper map $\left(= \begin{array}{l} \text{a closed continuous surjection} \\ \text{with compact fibers} \end{array} \right)$.

X : locally compact separable metrizable $\Rightarrow$ Y も locally compact separable metrizable.

proof. (Sketch). f が proper map であることから, Y は locally compact Hausdorff であることが示せる.

また f が 次の性質をもつことが示せる.

(i) $\forall K$ compact $\subset Y$ $f^{-1}(K)$ compact.

X の 1点 compact化 を $\bar{X} = X \cup \{\infty_X\}$, Y の 1点 compact 化 を $\bar{Y} = Y \cup \{\infty_Y\}$ としよう.

(i) から
$\bar{f} : \bar{X} \longrightarrow \bar{Y}$ を $\bar{f} | X = f$, $\bar{f}(\infty_X) = \infty_Y$ とすれば.

(ii) $\bar{f}$ は continuous surjection

であることがわかる. X は separable だから 第2可算, すると $\bar{X}$ も 第2可算, compact Hausdorff だから metrizable である (Urysohn の 距離化可能定理).

$\bar{f} : \bar{X} \to \bar{Y}$ は compact metrizable space $\bar{X}$ から compact Hausdorff space $\bar{Y}$ への continuous surjection であることを使うと.

(iii) $\bar{Y}$ も 第2可算

であることがわかる. 再び Urysohn の 距離化可能定理より $\bar{Y}$ は metrizable, よって

Y も metrizable である. //

3) Cell-likeness の位相不変性 (§1. Prop. 9 p.1.8)

Prop. 9. X : compact metrizable.

X : cell-like ($\Leftrightarrow$ $\forall e: X \hookrightarrow P^{ANR}$ topological embedding
$\forall U$: nbd of $e(X)$ $e(X) \simeq 0$ in U)

$\Leftrightarrow$ $\exists e: X \hookrightarrow P^{ANR}$ s.t. $\forall U$ nbd of $e(X)$ $e(X) \simeq 0$ in U.

Remark. $n = \dim X < \infty$ と仮定する. 一般の位置の議論の無限回反復によって topological embedding $e: X \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ を構成することができる. $e(X)$ の polyhedral nbd P は ANR であるから (p.1.8). 上の様な embedding は少なくとも一つ存在する.

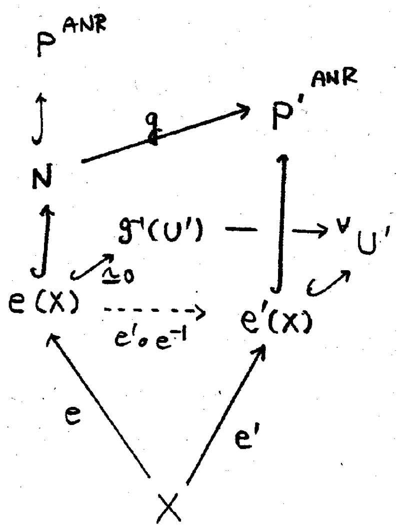
($\dim X = \infty$ でも、また X が compact でなくても、あるANR space Q への embedding を構成できる).
(compact とは限らない)

Proof of Prop. 9.

$\Leftarrow$) を証明すれば十分.

$e: X \longrightarrow P^{ANR}$ を仮定のような top. embedding,

$e': X \longrightarrow P'^{ANR}$ を任意の top. embedding とする.



$e' \circ e^{-1}: e(X) \to e'(X) \hookrightarrow P'$ に ANRの定義を適用して

$\exists N$: a nbd of $e(X)$ in P

$\exists g: N \to P$ a map s.t. $g \mid e(X) = e' \circ e^{-1}$

$e'(X)$ の任意の nbd U' に対して

$e(X) \hookrightarrow g^{-1}(U') \simeq 0$ だから.

$g(e(X)) = e'(X) \hookrightarrow U' \simeq 0$. //

4) Proper map の定義について.

$f : X \longrightarrow Y$ が proper map $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $^\forall K$ compact $\subset Y$ $f^{-1}(K)$ compact.

Prop $f : X \twoheadrightarrow Y$ metrizable space の間の continuous surjection.

f : proper $\Leftrightarrow$ f : closed かつ $^\forall y \in Y$ $f^{-1}(y)$ compact.

proof
$\Rightarrow$ $F \subset X$ closed set. $(y_m) \subset f(F)$ $y_n \to y$ とする.

$K = \{y_n \mid m = 1, \cdots\} \cup \{y\}$ は compact だから $f^{-1}(K)$ は compact. $f(x_n) = y_n$ を みたす $x_n \in F$

をとれば $x_{n_k} \to x_\infty \in f^{-1}(K)$. F が closed だから $x_\infty \in F$ かつ $y = f(x_\infty)$ //.

$\Leftarrow$ K : compact $\subset Y$.

$f^{-1}(K)$ の open cover $\mathcal{U}$ をとる. $y \in Y$ に対して $f^{-1}(y) \subset U_{\eta_1(y)} \cup \cdots \cup U_{\eta_{n_y}(y)}$

$U_{\eta_1(y)}, \cdots, U_{\eta_{n_y}(y)} \in \mathcal{U}$ をとる.

$W_y := U_{\eta_1(y)} \cup \cdots \cup U_{\eta_{n_y}(y)}$ とおく.

$V_y = Y \setminus f(X \setminus W_y)$ とすると. $y \in V_y$ open in Y

$f^{-1}(V_y) \subset W_y$

K の compactness から

$K \subset \bigcup_{i=1}^{N} V_{y_i}$ をみたす $y_1, \cdots, y_N$ をとれば

$\{ U_{\eta_j(y_i)} \mid i = 1, \cdots, N,\ j = 1, \cdots, n_{y_i} \} \subset \mathcal{U}$ は $f^{-1}(K)$ を cover する. //

5) Decomposition の upper semi-continuity と projection map の closedness.

Prop. X : a metrizable space. $\mathfrak{D}$: a decomposition of X s.t. $\forall D \in \mathfrak{D}$ closed in X

$\mathfrak{D}$: upper semicontinuous $\Longleftrightarrow$ $\pi : X \to X/\mathfrak{D}$ closed.

proof
$\Rightarrow$ $F \underset{\text{closed}}{\subset} X$ に対し. $\pi^{-1}\pi(F)$ が closed を示すため.

$y \notin \pi^{-1}\pi(F)$ とする. $y \in \Delta \in \mathfrak{D}$ に対し, $\Delta \cap F = \phi$ より

$\exists$ U, V open s.t. $y \in \Delta \subset U$, $F \subset V$ $U \cap V = \phi$.
U : $\mathfrak{D}$-saturated (by usc.).

このとき $U \cap \pi^{-1}\pi(F) = \phi$

$\because$)
$x \in U \cap \pi^{-1}\pi(F)$ なら. $x \in \Delta' \in \mathfrak{D}$ とすれば $\Delta' \subset \pi^{-1}\pi(F)$ より $\Delta' \cap F \neq \phi$
一方 U は $\mathfrak{D}$-saturated より $\Delta' \subset U$ これは矛盾.

$\Leftarrow$ $\Delta \in \mathfrak{D}$ の open nbd U に対し.

$W := X/\mathfrak{D} \setminus \pi(X \setminus U)$ とおく. このとき $\Delta \subset \pi^{-1}(W) \subset U$ で

$\pi^{-1}(W)$ は $\mathfrak{D}$-saturated である. //