寄稿

Freedman 原論文 (J. D. G 17 (1982))
７章
A short course in Bing topology
の解説

川村一宏（筑波大）

§１．Background
§２．Bing shrinking criterion
and star-like decomposition
§３．Whitehead continuum and manifold fuctors

２００９年　１０月１７日～２０日
Casson-Freedman 理論研究会　の参考資料として

講演者 川村一宏先生 にお願いして、講演準備原稿を
電子化させていただきました（集会世話人の１人　山田）
２００９年１０月.

Freedman Chap 7 A short course in Bing topology

Reference

[1] R. J. Daverman, Decompositions of manifolds Academic Press 1986

[2] T. B. Rushing, Topological embeddings Academic Press 1973

[3] J. van Mill, Infinite-dimensional Topology, Prerequisites and Introduction, North-Holland 1988.

§1 Backgrounds

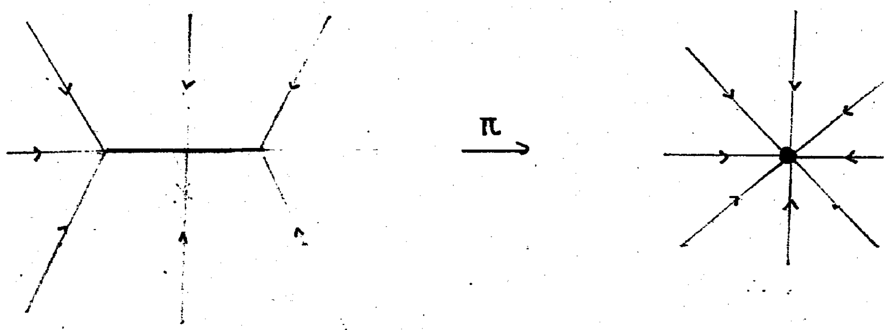
X : a compact subset of $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n / X$ = X を一点に縮めた quotient space.

$\mathbb{R}^n / X \approx \mathbb{R}^n$ が成立するのはどの様なときか?

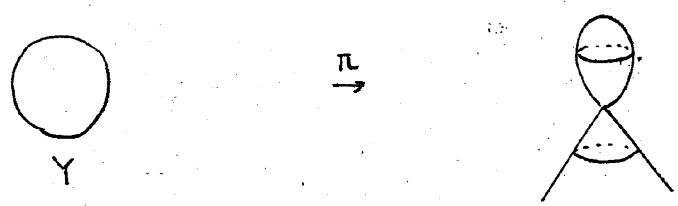
Example 0.

1) $X = [0,1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ $\qquad \mathbb{R}^2 / X \approx \mathbb{R}^2$



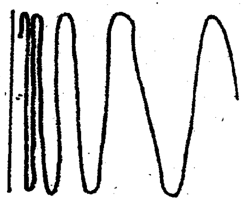
$\mathbb{R}^2 \qquad \approx \qquad \mathbb{R}^2/X$

2) $Y = S^1 \subset \mathbb{R}^2$ $\qquad \mathbb{R}^2/Y \not\approx \mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^2$ $\qquad Y \qquad\qquad \mathbb{R}^2/Y$

3)

$X =$  $:= \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid 0 < x \leq 1\} \cup \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$.

$$\mathbb{R}^2/X \approx \mathbb{R}^2.$$

上の例から：

∘ $\mathbb{R}^n/X \approx \mathbb{R}^n$ が成立する様な X は，$\mathbb{Z}$-係数 Čech cohomology が自明であることが多い． そのような X について homeomorphism $\mathbb{R}^n/X \approx \mathbb{R}^n$ は projection

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^n/X$$

を modify することによって得られ（そうである）る。

これを裏付けるのが次の定理である．

Def. 1. M^n : a topological manifold X : a compact subset of M^n.

X is cellular in M^n $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists (D_i)_{i=1}^{\infty}$ a sequence of n-balls of M s.t.

1) $D_1 \supset \mathring{D}_1 \supset D_2 \supset \cdots \supset D_i \supset \mathring{D}_i \supset D_{i+1} \supset \cdots$

2) $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$

Remark. "cellularity" は X 自身の topology だけでなく，X の M^n への埋め込まれ方も規定している。 上の Example 1) 3) は cellular set の例である．

Theorem 2 ([2. Theorem 1.8.1, Cor. 1.8.1 p.44], Freedman p.415 Observation 7.2)

X : a compact subset of $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n/X \approx \mathbb{R}^n \iff X$ is cellular in $\mathbb{R}^n$.

proof.

⇒ 川村先生から連絡を受けて，電子化の段階で 3行（⇒ の証明）削除しました．（山田）

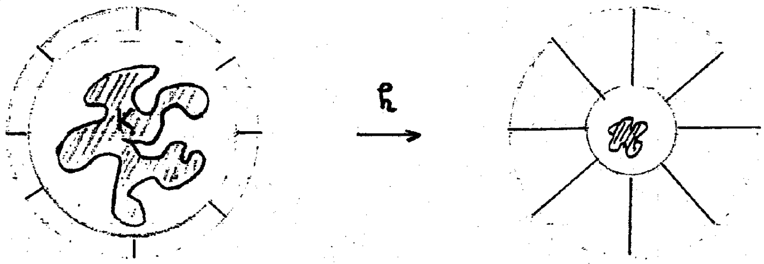
[川村先生 より]

... 証明になっておらず、本当は generalized Schoenflies theorem を使わないといけません。

⇐ X に対して cellularity の条件をみたす (D_i) をとる.

Lemma 3. D : an n-cell. K : compact $\subset \mathring{D}$ とする。

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists h : D \longrightarrow D$ a homeomorphism s.t. $h | \partial D = id$
diam $h(K) < \varepsilon$.



上の Lemma を $D_2 \subset D_1$ に apply :

$\exists h_2 : D_1 \longrightarrow D_1$ s.t. $h_2 | \partial D_1 = id$.
diam $h_2(D_2) < 1/2$.

次に $h_2(D_3) \subset h_2(D_2)$ に apply :

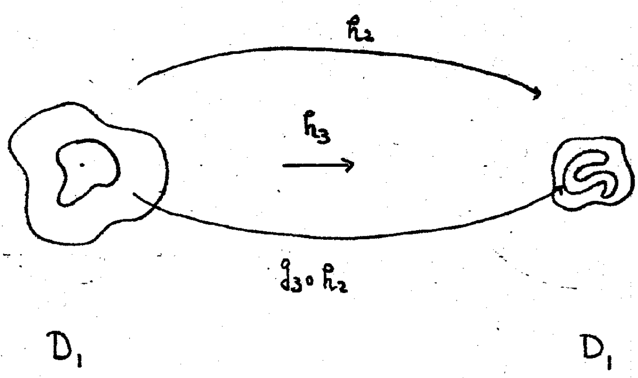
$\exists g_3 : h_2(D_2) \to h_2(D_2)$ s.t. $g_3 | \partial h_2(D_2) = id$
diam $g_3 h_2(D_2) < 1/4$.

$h_3 : D_1 \longrightarrow D_1$ を次で定める :

$h_3 | D_1 \setminus D_2 = h_2$

$h_3 | D_2 = g_3 \circ h_2 | D_2$.

h_3 は homeo.



これを繰り返して homeo. の sequence

$(h_i : D_1 \to D_1)_{i=1}^{\infty}$ を

(i.1) $h_i | D_1 \setminus D_{i-1} = h_{i-1}$

(i.2) $\operatorname{diam} h_i(D_i) < 1/2^i$ 　　をみたす様にとれる.

(i.1), (i.2) を合わせると. 　$h := \lim_{i\to\infty} h_i$ が存在して.（homeo ではない）

$h(X) = \{p\}$: a point , 　$h^{-1}(p) = X$ がわかる.

$h | \mathbb{R}^n \setminus D_1 = id$ 　とすることによって、map. 　$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ がえられる.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi"'] \arrow[drr, phantom, "\circlearrowleft"] & & \mathbb{R}^n \\
& \mathbb{R}^n/X \arrow[ur, dashed, "\bar{h}"'] &
\end{tikzcd}$$

$h(X) = p$ & $h^{-1}(p) = X$ だから.

h は $\bar{h} : \mathbb{R}^n/X \to \mathbb{R}^n$ を誘導し、$\bar{h}$ は homeo. である。 //

次に $\mathbb{R}^n$, より一般に topological manifold M^n 内に いくつか (一般には無限個) の closed set $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ を取り.

$\mathbb{R}^n$ (or M^n) から. 各 X_α をそれぞれ一点に縮めて得られる商空間 $\mathbb{R}^n$ (or M^n) $/\{X_\alpha\}$ を考えたい.

Q.4 どの様な条件の下で $\mathbb{R}^n(\text{resp. } M^n)/\{X_\alpha\} \approx \mathbb{R}^n(\text{resp. } M^n)$ が成立するか?

4-1) $\mathbb{R}^n$ (or M^n) $/\{X_\alpha\}$ は metrizable か? 有限次元か? (point-set topology)
locally compact か?

4-2) 〃 topological manifold か? ("Bing topology")

4-3) 〃 $\mathbb{R}^n$ (or M^n) と homeo か? (〃).

Def. 5. M^n : a topological manifold.

$\mathfrak{D}$: a collection of closed sets s.t. (i) $S_1 \overset{\neq}{,} S_2 \in \mathfrak{D}$ $S_1 \cap S_2 = \emptyset$

(ii) $\bigcup \mathfrak{D} = M^n$

を M^n の decomposition という. $M^n/\mathfrak{D}$ で 各 $S\in\mathfrak{D}$ をそれぞれ1点に縮めた quotient space (the decomposition space) を表わし.

$\pi : M^n \longrightarrow M^n/\mathfrak{D}$ を canonical projection とする。.

例えば Theorem 2 の状況では

$\mathfrak{D} = \{X\} \cup \{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}^n \setminus X\}$ である。

4-1) point-set topology :

(i) $\mathfrak{D}$ の member は compact でなければならない.

e.g. $\mathbb{R}^2 / \mathbb{R}^1 \times \{0\}$ は metrizable でない. (第1可算でないから).

(ii) 一般に次が成立する(付記 2) 参照).

$f: X \twoheadrightarrow Y$ a closed continuous surjection s.t. $f^{-1}(y)$ compact $\forall y \in Y$
これを <u>proper map</u> という.

X : locally compact separable metrizable $\Rightarrow$ Y も locally compact separable metrizable

そこで. projection $\pi: M \longrightarrow M/\mathfrak{D}$ が proper map であることを要請する.
(i) から π の fiber の compactness は既に要請されているから. π が closed map であることを保証すればよい.

Def. 6. decomposition $\mathfrak{D}$ が upper semi-continuous (usc) であるとは.

$\forall g \in \mathfrak{D}$ $\forall U$: open nbd of g $\exists V$: an open nbd of g s.t.

(1) $g \subset V \subset U$

(2) V は $\mathfrak{D}$ の member の(いくつかの) union (i.e. $\exists \mathfrak{D}' \subset \mathfrak{D}$ s.t. $V = \cup \mathfrak{D}'$)
このとき V は <u>$\mathfrak{D}$-saturated</u> であるという
(Freedman p.414)

すると.
$\pi: M \longrightarrow M/\mathfrak{D}$ が closed $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{D}$ usc (同上).

そこで以下 <u>decomposition $\mathfrak{D}$ は全て usc かつ. $\mathfrak{D}$ の member は全て compact</u> と仮定する.

このとき $M/\mathfrak{D}$ は <u>locally compact separable</u> metrizable space である.
$\uparrow$
(M の local compactness, separability から)

(iii) $M/\mathfrak{D}$ の有限次元性について.

point set topology における問題であるように見えるが. 実は geometric topology の問題である。 Freedman の論文においては この条件は 常にみたされているので. ここでは立ち入らない.

4-2), 3) について :

上の設定の下で. $\pi : M^n \longrightarrow M/\mathfrak{D}$ は proper map, $M/\mathfrak{D}$ は finite dimensional locally compact separable metrizable space であった。 ここで $M/\mathfrak{D}$ は更に locally contractible であると仮定する.

冒頭の例 Example 0 (2) からわかるように. $\mathfrak{D}$ の member が nontrivial topology をもてば $M/\mathfrak{D}$ は topological manifold になりえない. CW complex における contractibility を compact metrizable space に拡張した概念が cell-like-ness である.

Def. 7 X : a compact metrizable space.

$$X \text{ is cell-like} \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall e : X \longrightarrow P^{ANR} \text{ embedding に対して次が成り立つ:}$$

$$\forall U : \text{open nbd of } e(X) \qquad e(X) \simeq 0 \text{ in } U.$$

X として finite dim'l compact だけを考えるなら, "P が ANR である" ことの定義に煩わされる必要はなく. P は十分高い次元の Euclidean space $\mathbb{R}^N$ の standard triangulation に関する polyhedron と考えておいても大体よい.

metrizable space に限って, 定義を与えておく.

Def. 8. metrizable space Y が ANR (= Absolute Neighborhood Retract) であるとは.

任意の metrizable space X と, X の任意の closed set A, 任意の $f : A \longrightarrow Y$ に対し. A の nbd U と f の U への extension $\bar{f} : U \longrightarrow Y$ が存在すること :

$$\begin{tikzcd}
{}^{\forall}X & & \\
& {}^{\exists}U \arrow[dr, dashed, "{}^{\exists}\bar{f}"] & \\
{}^{\forall}A \arrow[uu, "\text{closed}"] \arrow[ur] \arrow[rr, "{}^{\forall}f"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

Y が R^N の subpolyhedron なら．Tietze の拡張定理から Y が ANR であることがわかる。Topological manifold も ANR であることが知られている（が三角形分割できない top. mfd. もあるから．上ほど明らかではない）．

より大切なことは「cell-like-ness を判定するには，1つの埋め込みについて条件を確かめればよい」ということである．

Prop. 9 （付記 3）参照） X : compact metrizable とする．

X : cell-like $\iff$ $\exists\, e : X \longrightarrow P^{ANR}$ an embedding s.t.

$\forall U$: open nbd of $e(X)$ $e(X) \simeq 0$ in U

$\iff$ $\exists\, e : X \hookrightarrow P^{ANR}$ an embedding s.t.

$\forall U$: open nbd of $e(X)$ $\exists V$: an open nbd of $e(X)$ s.t.

$V \subset U$ & $V \simeq 0$ in U.

従て
cell-likeness は X の位相についての性質であって．X の ANR への埋め込みには依存しない．

一方 cellularity (Def 1, p. 2) は X の埋め込みに関する条件である。

上の Prop. 9 と．Def. 1 を見比べれば

compact metric space X が cellularly embedded in a topological manifold M

$\Downarrow$

X は cell-like

逆に cell-like compactum X が topological manifold M^n に入っているとき．その埋め込みは cellular か？ $n \leq 2$ なら正しい． $n \geq 3$ に対しては：

Theorem 10 (McMillan Ann. Math. 79 (1964)). X : cell-like compact $\subset M^n$ a topological manifold. $n \geq 5$ とする． X が cellular $\iff$ $\forall U$: nbd of X in M $\exists V$: a nbd of X in M with $V \subset U$ s.t.

$$\pi_1(V \setminus X) \longrightarrow \pi_1(U \setminus X) = 0.$$

(the cellularity criterion)

残ったのは $n=3,4$ のとき。 $n=4$ のとき解決したのが Freedman の Theorem 1.11.
$n=3$ については $M=\mathbb{R}^3$ について正しいことが知られている.「全ての 3-manifold に対し Theorem10 が成り立つ」
$\Downarrow$
Poincaré conj. が正しい.

Theorem 11. Freedman (Theorem 1.11, p.373).
Theorem 10 は $n=4$ でも成り立つ.

Remark. Freedman は "X が cell-like" よりも弱く "$\check{H}_*(X;\mathbb{Z})=0$" の仮定の下で成り立つと述べているが. これは正しくない.
cf. D. Repovš, A criterion for cellularity in a topological 4-manifold, PAMS 100, No.3 (1987), 564-566.

(但し上の論文の Remark 1 は説明不足と思われる).

そこで decomposition $\mathfrak{D}$ の各 member は cell-like (あるいは cellularly embedded compact) としよう。この様な decomposition を <u>cell-like decomposition</u> (あるいは <u>cellular decomposition</u>) という.

そしてこの様な decomposition $\mathfrak{D}$ に対して

4-2) $M/\mathfrak{D}$ は topological manifold か?

4-3) $M/\mathfrak{D} \approx M$ か?

と再考する。次の定理は上の2つの問題は密接に関係していることを示している.

Theorem 12 (Siebenmann Topology 11 (1972), 271-294).

$f: M^n \longrightarrow N^n$ a continuous surjection between closed manifolds M^n, N^n.
s.t $\forall y \in N^n$ $f^{-1}(y)$ cell-like.
↳ この性質をもつ map を <u>cell-like map</u> という

$n \geq 5$ なら f は homeomorphism によっていくらでも近く近似できる: i.e.

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists h: M^n \longrightarrow N^n \text{ a homeo. s.t } d(f,h) := \sup\{d(f(x),h(x)) \mid x \in M\} < \varepsilon.$$

Remark. 上の定理は $n \leq 2$ なら成り立つ.
$n=3$ なら "cell-likeness" を "cellularity" に書き換えて成り立つことが示されている
(Armentrout TAMS 133 (1968), 307-332)

$n=4$ のとき 恐らく Freedman の結果を受けて Quinn によって示されている.

(Quinn, Ends of maps III, Dimension 4 and 5. J.Diff Geom. 17 (1982), 503-521)

以上の準備の下で ようやく Freedman, Chap.7 における 基本的定義を述べられる:

Def. 13. (Freedman, p.413).

$f: X \to Y$ を locally compact separable metric space の間の proper surjection とする.

f が ABH (= Approximable By Homeomorphism) である

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall \varepsilon: X \to (0,\infty)$ (小さい値をとる関数を想定している)
$\exists h: X \longrightarrow Y$ の homeo. s.t. $\mathrm{dist}_Y(f(x), h(x)) < \varepsilon(x)$ $\forall x \in X$

$\iff$ $\forall \varepsilon': Y \to (0,\infty)$ $\exists h: X \to Y$ の homeo. s.t. $\mathrm{dist}_Y(f(x), h(x)) < \varepsilon'(f(x))$ $\forall x \in X$.

↑
上述の Siebenmann の論文
p.283, Lemma 3.1 による.

Non-compact space を考察するときの常として, "近さ" を考える際には 空間全体で一様な constant を考えることは不適切, それが 上で majorant function ε, ε' を考える理由である.