§3 Whitehead continuum Wh and manifold factors.

J.H.C. Whitehead は contractible open 3-manifold M で $\mathbb{R}^3$ と homeo. でないものを構成する過程で 現在 Whitehead continuum Wh と呼ばれる compact connected set $\subset \mathbb{R}^3$ を見い出した (J.H.C. Whitehead, A certain open manifold whose group is unity Quat. J. Math. Oxford 6 (1935), 268-279).

上の M の構成法は. 例えば J. Hempel, 3-Manifolds Ann. Math. Studies, Princeton 1976 p.156-157 参照.

Wh は cell-like compact set であるが $\mathbb{R}^3$ 内で cellular でない. 実際 $\mathbb{R}^3/\mathrm{Wh}$ は manifold ではない. 一方で

$$(\mathbb{R}^3/\mathrm{Wh}) \times \mathbb{R}^1 \approx \mathbb{R}^4$$

という著しい性質をもつ. Freedman §8 において. この例が大切な役割を果たすので、再び [1] に従って Wh について述べる.

一般に $X \times \mathbb{R}$ が topological manifold なら. X は homology manifold である. 即ち:

Prop. 1. $X \times \mathbb{R}$ が ANR homology $(n+1)$-manifold なら. X は ANR homology n-manifold である。

ここで ANR homology n-manifold とは. locally compact separable metrizable ANR Y で

$$H_*(Y, Y-\{y\}) \cong H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \quad (H_*(\cdot) \text{ は } \mathbb{Z} \text{ 係数 singular homology}).$$

をみたすもののこと.

ANR Y は locally contractible で. CW complex と同じ homotopy type をもつから. singular homology が "適切な" homology theory である.

Prop 1 を示すには. $(x,t) \in X \times \mathbb{R}$ に対して. nbd $U \times (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ をとり.

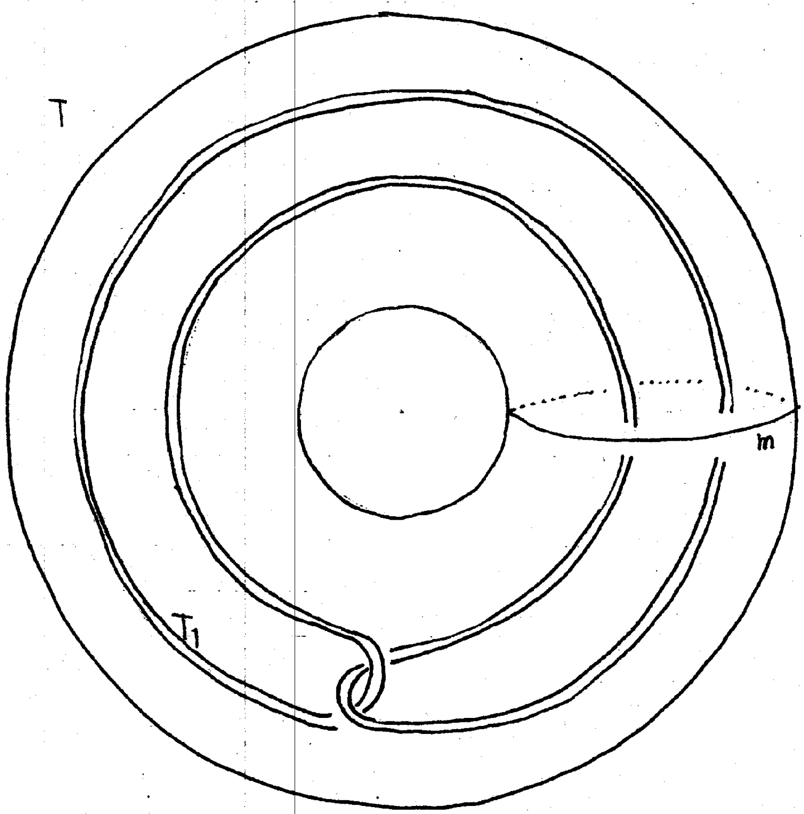
$$\begin{aligned}
H_*(X\times\mathbb{R}, X\times\mathbb{R} - (x,t)) &\underset{\text{excision}}{\cong} H_*(U\times(t-\varepsilon,t+\varepsilon), U\times(t-\varepsilon,t+\varepsilon) - (x,t)) \\
\cong \quad & \\
H_*(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1}-0) \qquad &\cong H_*((U, U-x)\times((t-\varepsilon,t+\varepsilon)-t)) \\
&\underset{\text{Künneth}}{\cong} H_*(U, U-x) \otimes \underbrace{H_*((t-\varepsilon,t+\varepsilon),(t-\varepsilon,t+\varepsilon)-t)}_{\text{torsion free}}
\end{aligned}$$

から $H_*(X, X-x) \cong H_*(U, U-x) \cong H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$ を導けばよい. //

従て $\mathbb{R}^3/Wh$ は topological manifold でない homology manifold の例でもある.

Def 2 (Whitehead continuum)

$\mathbb{R}^3$ 内の standard solid torus T の内部に図の様な solid torus T_1 をとる。



$T_1 \simeq 0$ in T に注意.
homotopic

もちろん T_1 は nontrivial knot の regular nbd である.

solid torus $T_2 \subset \mathrm{Int}\, T_1$ を

$(T_1, T_2) \approx (T, T_1)$ をみたす様にとり,
⋮
と続けて
$(T_{j+1}, T_j) \approx (T, T_1)$ をみたす solid tori の列

$T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset \cdots$ をとり,

$Wh := \bigcap_{i=1}^{\infty} T_i$ とおく.

(2.1) Wh は cell-like である (§1. Def. 7 p.1.7)

proof.

§1. Prop 9 から Wh の cell-likeness を示すには T において Def. 7 の条件を確かめれば十分である.

Wh の任意の nbd U に対して 大きな j をとって $T_j \subset U$ とする. $Wh \subset T_{j+1} \subset T_j$ かつ

$(T_{j+1}, T_j) \approx (T_1, T)$, $T_1 \simeq 0$ in T から $Wh \simeq 0$ in $T_j \subset U$. //

(2.2) Wh は cellular でない.

proof. もし Wh が cellular なら, §1, Theorem 2 から $\mathbb{R}^3/Wh \approx \mathbb{R}^3$ である. 従て

projection
$\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3/Wh$ において $\pi(Wh) := w$ とおくと、w の nbd U で $U \approx \mathbb{R}^3$ であるものをいくらでも小さくとれる

よって w の nbd の sequence

$$U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \cdots \qquad \supset \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k = \{w\}$$ を

$\pi_1(U_j \setminus U_{j+1}) \longrightarrow \pi_1(U_j \setminus \{w\}) = 0$ をみたす様にとれるはずだが.
それは Wh の construction から不可能である. //

以下 次の定理の証明を目標とする.

Theorem 3 $(\mathbb{R}^3/Wh) \times \mathbb{R}^1 \approx \mathbb{R}^4$. (Freedman Theorem 7.4 と本質的に同じ).

まず $\mathbb{R}^4$ の decomposition $\mathfrak{D}$ を

$$\mathfrak{D} = \{ Wh \times \{t\} \mid t \in \mathbb{R}^1 \} \cup \{ \{x\} \mid x \notin Wh \times \mathbb{R} \}$$ とおく. 定義から

$(\mathbb{R}^3/Wh) \times \mathbb{R}^1 \approx \mathbb{R}^4/\mathfrak{D}$ であるから. §2, Theorem 2 (p.2.2, ABH $\Leftrightarrow$ BSC) より.

$\mathfrak{D}$ が shrinking criterion をみたすことを示せばよい. $Wh = \bigcap_{i=1}^{\infty} T_i$ と表わされていることを
想い起こせば, 次を示せば十分である:

Prop 4. $\forall \varepsilon > 0$ $\forall k \geq 1$. $\exists h : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a homeo. s.t.

(1) $h|(\mathbb{R}^3 - T_k) \times \mathbb{R}^1 = id$.

(2) $h(T_k \times \{t\}) \subset T_k \times [t-\varepsilon, t+\varepsilon]$

(3) $\operatorname{diam} h(Wh \times \{t\}) < \varepsilon$. $\forall t \in \mathbb{R}^1$. ([1] p.81, Theorem 1).

上を示すため. Andrews - Rubin による次の Lemma を用いる:

Lemma 5 ([1], p.81-83, Lemma 2). $T = D^2 \times S^1$ を solid torus, $Q \subset \operatorname{Int} T$ を
finite polyhedron で $j : Q \hookrightarrow T \simeq 0$ をみたすものとする. このとき.

$\exists \alpha > 0$ $\exists f : T \times \mathbb{R}^1 \longrightarrow T \times \mathbb{R}^1$ a homeo s.t.

(1) $f| \partial D^2 \times S^1 \times \mathbb{R}^1 = id$. (2) $f(T \times \{t\}) \subset T \times [t-\alpha, t+\alpha]$

(3) $f(Q \times \{t\}) \subset D^2 \times \{\text{a point}\} \times [t-\alpha, t+\alpha]$.

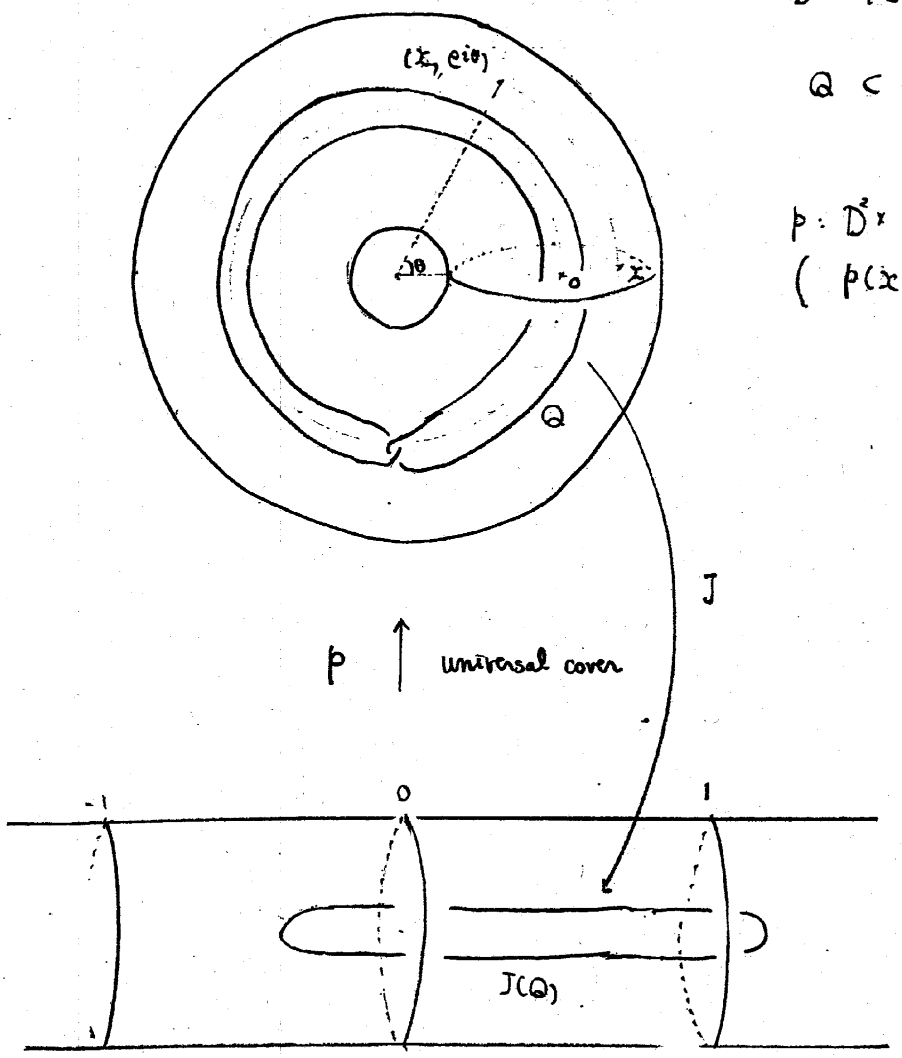
Proof. $D^2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 \}$, $S^1 = \{ e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R} \}$ とみなし.

$D^* = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1/2 \}$ とおく.

$Q \subset D^* \times S^1 \subset D \times S^1 = T$ としてよい.

$p : D^2 \times R^1 \longrightarrow D^2 \times S^1$ を universal cover とする

$\left(p(x, \theta) = (x, e^{i\theta}),\ (x, \theta) \in D^2 \times \mathbb{R}^1 \right)$



$D^2 \times \mathbb{R}^1$

(本来は"縦長"に描くべきです)

$j : Q \hookrightarrow T \simeq 0$ だから. j の lift $J : Q \to D^2 \times \mathbb{R}^1$ を一つ取って固定する.

$J(x,s) = (x, w(x,s))$ $\quad (x,s) \in Q \subset D^2 \times S^1 = T$ とおくと. $p \circ J = j$ は

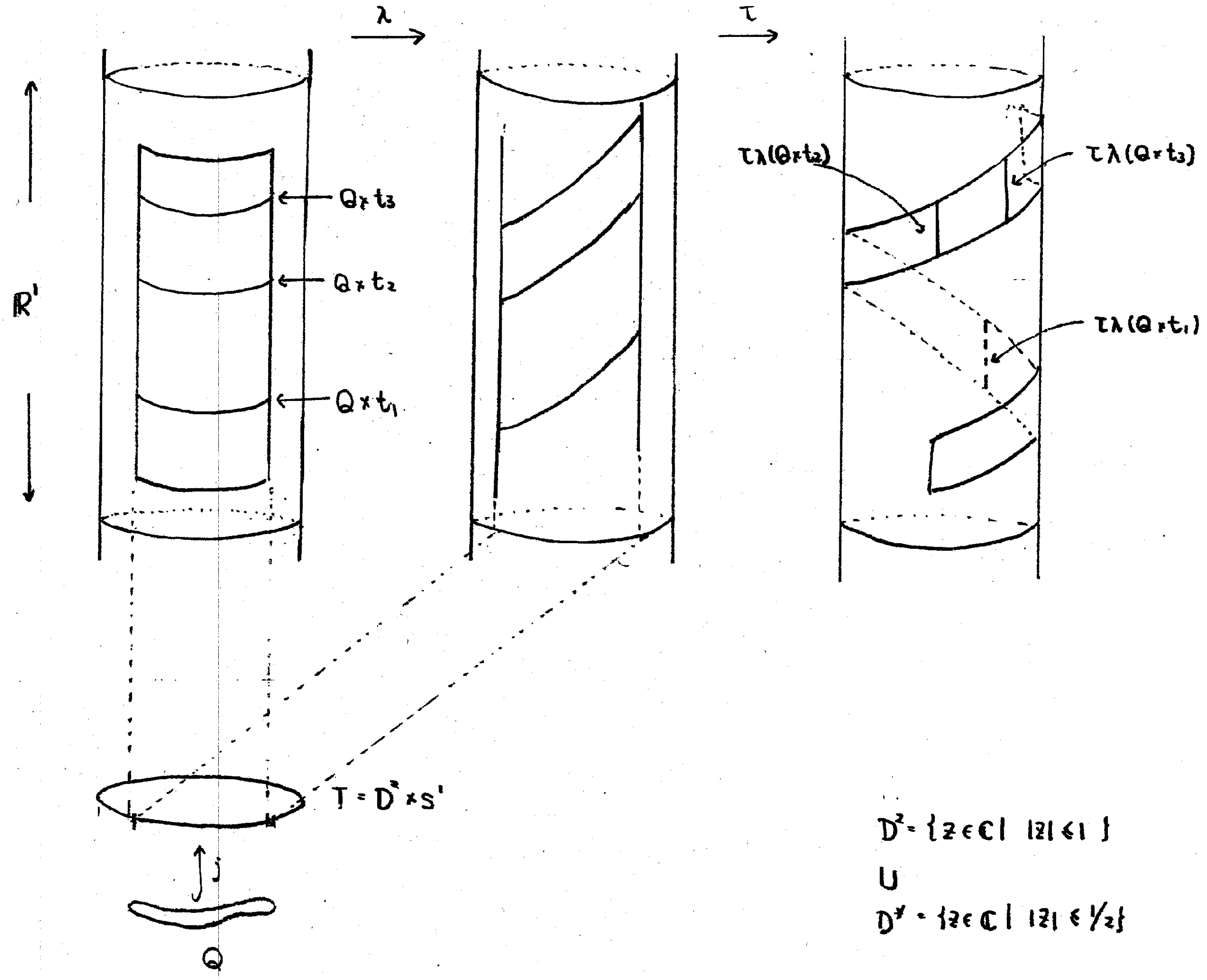
(*) $e^{iw(x,s)} = s$ $\quad (x,s) \in Q$ と書き直すことができる.

(**) $w(Q) \subset [-\alpha, \alpha]$
をみたす $\alpha > 0$ をとって w の extension

$\psi : T \longrightarrow [-\alpha, \alpha]$ $\quad \psi | \partial D^2 \times S^1 \equiv 0$
$\psi | Q = w$ をとる

$f: T\times\mathbb{R}^1 \to T\times\mathbb{R}^1$ で (1)〜(3) をみたすものを構成するため、次の2つの homeo.

$\lambda: T\times\mathbb{R}^1 \to T\times\mathbb{R}^1$, $\tau: T\times\mathbb{R}^1 \to T\times\mathbb{R}^1$ を考え、$f = \tau\circ\lambda$ とする.



$D^2 = \{z\in\mathbb{C} \mid |z|\leq 1\}$

$\cup$

$D^* = \{z\in\mathbb{C} \mid |z|\leq 1/2\}$

λ の def:

$$\lambda: T\times\mathbb{R}^1 = D^2\times S^1\times\mathbb{R}^1 \longrightarrow D^2\times S^1\times\mathbb{R}^1 = T\times\mathbb{R}^1$$
$$\lambda((x,s),t) := ((x,s),\ \psi(x,s)+t) \qquad (x,s)\in D^2\times S^1,\quad t\in\mathbb{R}^1.$$

つまり、λ は "水平レベル" $T\times t$ を "斜めに lift" する homeo である.

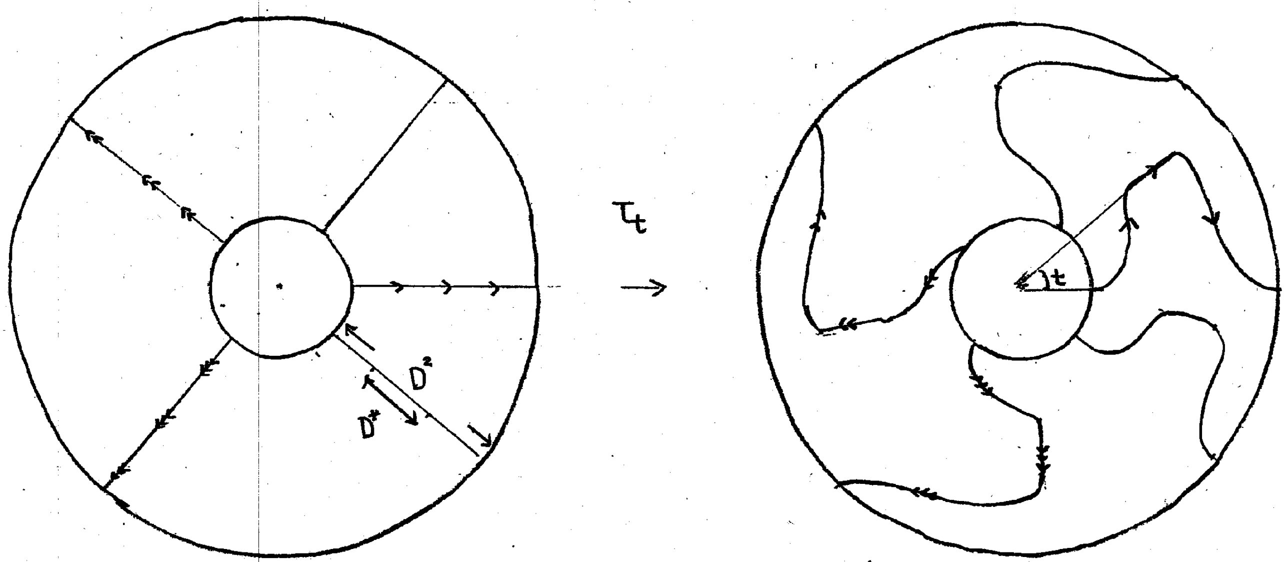
τ の def.

$\tau: D^2\times S^1\times\mathbb{R}^1 = T\times\mathbb{R}^1 \longrightarrow T\times\mathbb{R}^1 = D^2\times S^1\times\mathbb{R}^1$ は、水平レベル $T\times t$ を保ち、$T\times t = D^2\times S^1\times t \longrightarrow T\times t = D^2\times S^1\times t$ は $D^2\times S^1$ 上の twist を行う. 具体的には:

$$\tau((x,s),t) = (\tau_t(x,s),t) \qquad (x,s)\in D^2\times S^1,\quad t\in\mathbb{R}^1, \qquad \text{ここで}$$

$$\tau_t(x,s) = \begin{cases} (x,\ s e^{-2it(1-|x|)}) & (x,s)\notin D^*\times S^1 \\ (x,\ s e^{-it}) & (x,s)\in D^*\times S^1. \end{cases}$$

(次ページの図)



$D^2 \times S^1$ $\qquad\qquad$ $D^2 \times S^1$

$f = \lambda \circ \tau$ が (1) ~ (3) をみたすことを確めよう：

(1) $((x,s),t) \in \partial D^2 \times S^1 \times \mathbb{R}^1$ とする.

$f((x,s),t) = \tau\lambda((x,s),t)$ $\quad \big\downarrow\ \psi(x,s) = 0$

$= \tau((x,s),t)$ $\quad \big\downarrow\ |x| = 1$

$= ((x, s e^{-2it(1-1)}), t) = ((x,s),t)$ より O.K.

(2) $f(T \times \{t\}) = \tau\lambda(T \times \{t\})$ $\quad \big\downarrow\ \psi(T) \subset [-d, d]$

$\subset \tau(T \times [t-d, t+d])$ $\quad \big\downarrow\ \tau$ は $T \times \{t\}$ を保つから.

$= T \times [t-d, t+d]$ より…

(3) $(x,s)\in Q$, $t\in\mathbb{R}^1$ に対して.

$$
\begin{aligned}
f((x,s),t) &= \tau\lambda((x,s),t) \\
&= \tau((x,s),\ t+\psi(x,s)) \qquad \wr\ (x,s)\in D^{*}\times S^1 \\
&= (x,\ s e^{-i(t+\psi(x,s))},\ t+\psi(x,s)) \\
&= (x,\ s e^{-i\psi(x,s)}e^{-it},\ t+\psi(x,s)) \qquad \wr\ \psi(x,s)=w(x,s) \\
&= (x,\ s e^{-iw(x,s)}e^{-it},\ t+w(x,s)) \qquad \wr\ (*):\ e^{iw(x,s)}=s \\
&= (x,\ e^{-it},\ t+w(x,s)). \in D^2\times\{e^{-it}\}\times[t-d,t+d]
\end{aligned}
$$

i.e. $f(Q\times\{t\})\subset D^2\times\{e^{-it}\}\times[t-d,t+d]$. //

以上で Lemma 5 が証明された. //

Remark 6. Lemma 5 における $d>0$ は

(**) $w(Q)\subset[-d,d]$ (p.34)

をみたすものとして選ばれた. universal cover を与える map $p: D^2\times\mathbb{R}^1\to D^2\times S^1$ を reparametrize して

$p_N(x,\theta)=(x,e^{iN\theta})$ (N は十分大きな正の数)

に対して 上の議論を繰り返せば d は望むだけ小さくできる.

最後に Prop 4 を証明する.

$Wh=\bigcap_{j=1}^{\infty}T_j$, $(T_j,T_{j+1})\approx(T,T_1)$ であった.

$\varepsilon>0$ と $k\geq1$ に対して homeomorphism $h:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ を

(1) $h\,|\,(\mathbb{R}^3-T_k)\times\mathbb{R}^1=id$

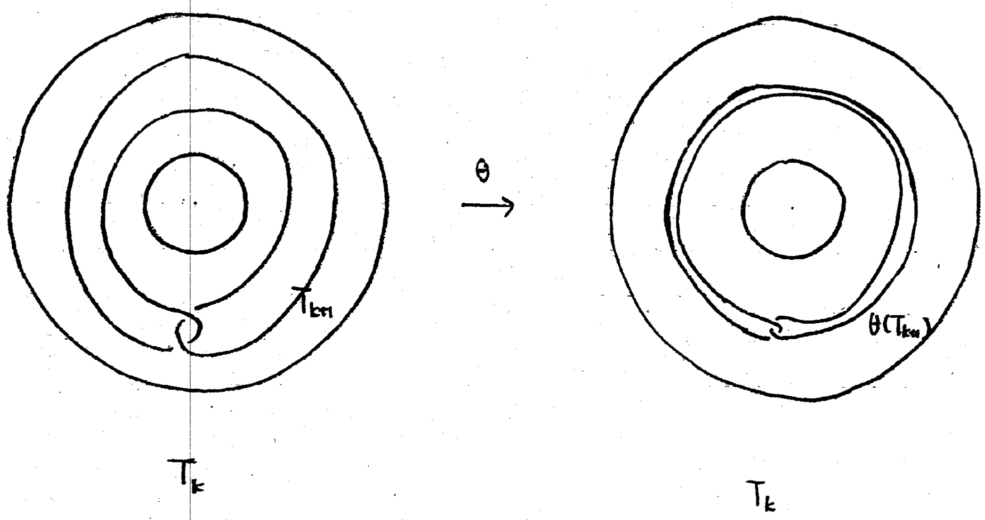
(2) $h(T_k\times\{t\})\subset T_k\times[t-\varepsilon,t+\varepsilon]$

(3) $\operatorname{diam} h(Wh\times\{t\})<\varepsilon$ $\quad{}^{\forall}t\in\mathbb{R}^1$ をみたす様に見つけたい.

Lemma 5 を $T = T_k = D^2 \times S^1$,
$Q = T_{k+1}$ として用いる. まず $\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a homeo with

$\theta | \mathbb{R}^3 - T_k = id$. $\theta(T_{k+1})$ は T_k の core に十分近く、

$\forall$ meridian disk $D^2 \times \{s\}$ に対し diam $\theta(T_{k+1}) \cap (D^2 \times \{s\}) < \varepsilon/2$ としておく.



Lemma 5 から a homeo. $f : T_k \times \mathbb{R}^1 \to T_k \times \mathbb{R}^1$ と $d > 0$ で.

(4) $f | \partial T_k \times \mathbb{R}^1 = id$.

(5) $f(T_k \times \{t\}) \subset T_k \times [t-d, t+d]$

(6) $f(\theta(T_{k+1}) \times \{t\}) \subset D^2 \times \{a \text{ point}\} \times [t-d, t+d]$

をみたすもの or ある. (4)とθの定義から, $f \circ \theta \times 1_{\mathbb{R}^1}$ は $\mathbb{R}^4$ 上の homeo $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ に自然に拡張できる.

Remark 6 より $0 < d < \varepsilon$ としてよい. θ の取り方と Lemma 5 における f の構成から.

diam $(f(\theta(T_{k+1}) \times \{t\}) \cap D^2 \times \{a \text{ point}\} \times \{t'\}) < \varepsilon/2$ $\quad \forall t' \in [t-d, t+d]$.

よって

(2) $h(T_k \times \{t\}) \subset T_k \times [t-\varepsilon, t+\varepsilon]$ $\quad \forall t \in \mathbb{R}^1$

(3) diam $h(Wh \times \{t\}) \le$ diam $h(T_{k+1} \times \{t\}) \le \left(\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \right)^{1/2} < \varepsilon$. $\quad \forall t \in \mathbb{R}^1$

がえられた. //

付記

1) §7 における誤植について、気付いた範囲で訂正します.

p.416 line 5 "a" を除く.
Diagram 7.1 $i_0(S^1 \times D^2)$ は $i_2(S^1 \times D^2)$ に絡んでいるべき.

p.416 line 8 "compaction" → "a compactum" ?

p.420 Theorem 7.3 証明中の C の定義:

$$C = m^{-1}([3/4, 11/4] \cup [13/4, 21/4] \cup \cdots)$$

(たぶん)

p.421 lines 1~4 AUC, BUC → $A \cup C$, $B \cup C$ (和集合).

p.424 line 4 $D^2 \times S^1 \times [0, \sigma) / Wh \times [0, \infty)$

"∞" であるべき.

p.424-425 二つの diagram を交換する.

2) Proper map による metrizability の保存 (4-1) (ii) p. 1.6).

Prop. $f: X \twoheadrightarrow Y$ a proper map (= a closed continuous surjection with compact fibers).

X : locally compact separable metrizable $\Rightarrow$ Y も locally compact separable metrizable .

proof.(Sketch). f が proper map であることから Y は locally compact Hausdorff であることが示せる.

また f が 次の性質をもつことが示せる.

(i) $\forall K$ compact $\subset Y$ $\quad f^{-1}(K)$ compact.

X の1点 compact化を $\bar{X} = X \cup \{\infty_X\}$, Y の1点 compact 化を $\bar{Y} = Y \cup \{\infty_Y\}$ としよう.

(i) から
$\bar{f}: \bar{X} \longrightarrow \bar{Y}$ を $\quad \bar{f}|X = f,\ \bar{f}(\infty_X) = \infty_Y$ とすれば.

(ii) $\bar{f}$ は continuous surjection

であることがわかる. X は separable だから 第2可算, すると $\bar{X}$ も 第2可算, compact Hausdorff だから metrizable である (Urysohn の距離化可能定理).

$\bar{f}: \bar{X} \to \bar{Y}$ は compact metrizable space $\bar{X}$ から compact Hausdorff space $\bar{Y}$ への continuous surjection であることを使うと.

(iii) $\bar{Y}$ も 第2可算

であることがわかる. 再び Urysohn の距離化可能定理より $\bar{Y}$ は metrizable, よって

Y も metrizable である. //

3) Cell-likeness の位相不変性 (§1. Prop. 9 p.1.8)

Prop. 9. X : compact metrizable.

X : cell-like $\left(\Leftrightarrow \ \forall e : X \hookrightarrow P^{ANR} \right.$ topological embedding
$\left. \forall U : \text{nbd of } e(X) \quad e(X) \simeq 0 \text{ in } U \right)$

$\Leftrightarrow \ \exists e : X \hookrightarrow P^{ANR}$ s.t. $\forall U$ nbd of $e(X)$ $e(X) \simeq 0$ in U.

Remark. $n = \dim X < \infty$ と仮定する. 一般の位置の議論の無限回反復によって topological embedding

$e : X \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ を構成することができる. $e(X)$ の polyhedral nbd P は ANR である (p.1.8) から. 上の様な embedding は少なくとも一つ存在する.

($\dim X = \infty$ でも、また X が compact でなくても、あるANR space Q への embedding を構成できる).
(compact とは限らない)

Proof of Prop. 9.

$\Leftarrow$) を証明すれば十分.

$e : X \longrightarrow P^{ANR}$ を仮定のような top. embedding,

$e' : X \longrightarrow P'^{ANR}$ を任意の top. embedding とする.

$$
\begin{tikzcd}
P^{ANR} & & \\
N \arrow[u, hook] \arrow[rr, "g"] & & P'^{ANR} \\
g^{-1}(U') \arrow[rr] & & \forall U' \\
e(X) \arrow[uu, hook] \arrow[u, "\simeq 0"'] \arrow[rr, dashed, "e' \circ e^{-1}"'] & & e'(X) \arrow[uu, hook] \arrow[u] \\
& X \arrow[ul, "e"] \arrow[ur, "e'"'] &
\end{tikzcd}
$$

$e' \circ e^{-1} : e(X) \to e'(X) \hookrightarrow P'$ に ANRの定義を適用して

$\exists N$: a nbd of $e(X)$ in P

$\exists g : N \to P$ a map s.t. $g \mid e(X) = e' \circ e^{-1}$

$e'(X)$ の任意の nbd U' に対して

$e(X) \hookrightarrow g^{-1}(U') \simeq 0$ だから.

$g(e(X)) = e'(X) \hookrightarrow U' \simeq 0$. //