$S(X) \xrightarrow{\tau} N(X)$ の定義

$$S(X) \ni [f: M \to X \text{ ホモトピー同値}]$$

$\Downarrow$

- $J\nu_M \simeq f^*\nu_X$
- ν_Mは$J\nu_M$のbdl reduction

$\Downarrow$

ν_Xのbdl reduction ηが定まる

$\Downarrow$

$\downarrow \tau$

$$N(X) \ni \left[(f,b):(M,\nu_M) \to (X, {}^\exists\eta) \ \ \begin{matrix}\deg = 1\\ \text{normal}\end{matrix}\right]$$

Q $\mathrm{Im}\,\tau$ を決定せよ.

$f: M \to X$ はいつホモトピー同値写像にbordantか?

Idea

$$\cdots \to \pi_i(M) \to \pi_i(X) \to \pi_i(f) \to \pi_{i-1}(M) \to \cdots$$

- $\pi_i(f)$ の元をsurgeryで消していく $\longrightarrow$ obstructionがある
- $\forall i \ \pi_i(f) = 0$ とできれば

J.H.C. Whitehead の定理から fはホモトピー同値写像

§3 Surgery obstruction

Surgery

$M^m \supset S^n \times D^{m-n}$ embedding given

$$M'^m := \overline{M \setminus S^n \times D^{m-n}} \cup_{S^n \times S^{m-n-1}} D^{n+1} \times S^{m-n-1}$$

Ex

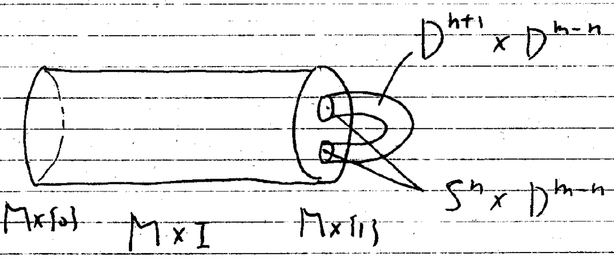
- $S^m = \partial(D^{n+1} \times D^{m-n}) = S^n \times D^{m-n} \cup D^{n+1} \times S^{m-n-1}$

$\downarrow$ surgery

$$D^{n+1} \times S^{m-n-1} \cup D^{n+1} \times S^{m-n-1} = S^{n+1} \times S^{m-n-1}$$

- $M^m = M^m \# S^m \xrightarrow[\text{上のSurgery}]{} M^m \# S^{n+1} \times S^{m-n-1}$

Surgeryのtrace

$(W; M, M') :=$ 

◎ これは $M' \times I$ で $M' \times I \supset D^{n+1} \times S^{m-n-1}$ に $D^{n+1} \times D^{m-n}$ をはったものとも思える.

$\to$ dual Surgery

Surgery の効果

- $M^m \supset S^n \times D^{m-n} \supset S^n \times \{0\}$ Core

$$x = [S^n \times \{0\}] \in \pi_n(M^m)$$

$$\Rightarrow \pi_i(W) = \begin{cases} \pi_i M & (i < n) \\ \pi_i M / \langle x \rangle & (i = n) \end{cases}$$

- Dualでは

$M'^m \supset D^{n+1} \times S^{m-n-1} \supset \{0\} \times S^{m-n-1}$ Cocore

$$x' = [\{0\} \times S^{m-n-1}] \in \pi_{m-n-1}(M')$$

$$\Rightarrow \pi_i(W) = \begin{cases} \pi_i M' & (i < m-n-1) \\ \pi_i M' / \langle x' \rangle & (i = m-n-1) \end{cases}$$

Surgery on normal maps

Def $f : M^m \to X$ given

(i) framed n-immersion Φ in f

$$\begin{tikzcd} S^n \times D^{m-n} \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\Phi"] & M \arrow[d, "f"] \\ D^{n+1} \times D^{m-n} \arrow[r, "\bar{h}"'] & X \end{tikzcd} \qquad \underline{\text{Core}} \quad \begin{tikzcd} S^n \times \{0\} \arrow[r, "g"] \arrow[d] & M \arrow[d, "f"] \\ D^{n+1} \times \{0\} \arrow[r, "h"'] & X \end{tikzcd}$$

※ $\bar{g}$ が embedding のとき Φ を framed n-embedding という

(ii) n-surgery on f removing framed n-emb. Φ

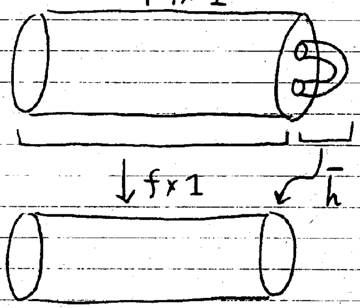
$$M' := \overline{M \setminus \bar{g}(S^n \times D^{m-n})} \cup D^{n+1} \times S^{m-n-1}$$

Trace bordism

$(F; f, f') : (W; M, M') \longrightarrow X \times (I; \{0\}, \{1\})$

$F = (f \times 1) \cup \bar{h} : W = M \times I \cup_{\bar{g}} D^{n+1} \times D^{m-n} \longrightarrow X \times I$

$M \times I$



$\downarrow f \times 1$ $\bar{h}$

$X \times I$

$$\begin{tikzcd} S^n \times D^{m-n} \arrow[r, hook, "\bar{g}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\bar{\Phi}"] & M \arrow[d, "f"] \\ D^{n+1} \times D^{m-n} \arrow[r, "\bar{h}"'] & X \end{tikzcd}$$

@ Φ の core $\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{g} & M \\ \downarrow & & \downarrow f \\ D^{n+1} & \xrightarrow[h]{} & X \end{array}$ は $x = [(h, g)] \in \pi_{n+1}(f)$ を定める

Surgery の効果

$$\pi_i(F) = \begin{cases} \pi_i(f) & (i \leq n) \\ \pi_i(f)/\langle x \rangle & (i = n+1) \end{cases}$$

dual

$$\pi_i(F) = \begin{cases} \pi_j(f') & (j \leq m-n-1) \\ \pi_j(f')/\langle x' \rangle & (j = m-n) \end{cases}$$

cocore

というわけで

$x \in \pi_{n+1}(f)$ が surgery で消せるためには

x が framed embedding で代表されればよい

2つの障害 ① framing を取れるか？

② embedding に (regular) homotopic か？

Prop. $(f, b) : M^m \longrightarrow X$ normal map $\boxed{m \geq 5}$

$m > 2(\ell - 1) \Longrightarrow \forall x \in \pi_\ell(f)$ は framed embedding で代表される。

($\because$) Whitney embedding & framing の考察 //

Cor $m = 2n$ or $m = 2n+1$ のとき

$\pi_i(f)$ の元を下から順に消していくことにより

$(f, b) : M \to X$ は n-connected map に bordant

$\forall i \leq n \quad \pi_i(f) = 0$

$\tilde{X}$ universal cover, $\tilde{M} := f^*\tilde{X} \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{X}$

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[d, "\pi := \pi_1 X"] & \tilde{M} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi"] & \tilde{X} \arrow[d, "\pi"] \\ X & M \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

$$K_i(M) := H_{i+1}(\tilde{f}) = H_{i+1}(C(\tilde{f}))$$

$\tilde{f}$ の mapping cone

$$\cdots \to H_{i+1}(\tilde{X}) \to \underbrace{H_{i+1}(\tilde{f})}_{= K_i(M)} \to H_i(\tilde{M}) \to H_i(\tilde{X}) \to \underbrace{H_i(\tilde{f})}_{= K_{i-1}(M)} \to \cdots$$

相対 Hurewicz

f: n-connected

$$\Rightarrow \pi_i(f) = \pi_i(\tilde{f}) = H_i(\tilde{f}) = \begin{cases} K_{i-1}(M) & (i = n+1) \\ 0 & (i \leq n) \end{cases}$$

Prop. $(f, b): M^{2n} \to X$ (resp. M^{2n+1}) deg$=1$ normal map は

$i \neq n$ (resp. $i \neq n, n+1$) $\Rightarrow K_i(M) = 0$ である deg$=1$ normal map に bordant

(∵) • f が n-connected map に bordant であることは上でやった

$\Rightarrow$ $i < n$, $K_i(M) = 0$

• Poincaré duality から $i > n$, $K_i(M^{2n})$ も言える

Q $m = 2n$ (2n+1) のとき $\pi_{n+1}(f) = K_n(M)$ ($K_n(M)$, $K_{n+1}(M)$) の元はいつ surgery で消せるか?

[Wall] $\boxed{m \geq 5}$

- $L_m(\mathbb{Z}[\pi])$
- $\sigma: N(X) \to L_m(\mathbb{Z}[\pi])$, $(f, b) \mapsto \sigma(f, b)$

が定義され

$\sigma(f, b) = 0$ のとき $K_n(M)$ ($K_n(M)$, $K_{n+1}(M)$) の元は surgery で消せる.

◎一方 $\forall i$ $K_i(M) = 0$ $\Rightarrow$ f はホモトピー同値

J.H.C. Whitehead

最終的に次が示せる

Theorem (Wall)

$$\sigma(f, b) = 0 \iff (f, b) \text{ はホモトピー同値写像に bordant}$$

Remark

$L_m(\mathbb{Z}[\pi])$ は m について周期 4.

以下次の場合のみ説明する

$\begin{cases} m = 4k \\ \pi_1 = 1 \end{cases}$

Prop. $(f, b) : M^{4k} \to X$ $\deg = 1$, normal, h-connected

$\Rightarrow$ 交叉形式 (kernel form) $\lambda : K_{2k}(M) \times K_{2k}(M) \to \mathbb{Z}$

は symmetric unimodular even form

$(\because)$ Thom 同型 & Wu class を考察

$$x \cup x \underset{(2)}{\equiv} x \cup W_{2k} \quad //$$

Def

$$L_{4k}(\mathbb{Z}[1]) := \left\{ \begin{matrix} \text{Symm. Unimodular even form}/\mathbb{Z} \text{ 全体} \\ \lambda : K \times K \to \mathbb{Z} \end{matrix} \right\} \Big/ \sim$$

$\lambda \sim \lambda' \underset{def}{\Leftrightarrow} \lambda \oplus H^{\ell} \cong \lambda' \oplus H^{\ell'}$ $\exists \ell, \ell'$

H : hyperbolic form $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

和 : $(K, \lambda) \oplus (K', \lambda') = (K \oplus K', \lambda \oplus \lambda')$

逆 : $-(K, \lambda) = (K, -\lambda)$

Remark

- $(K, \lambda) \oplus (-(K, \lambda)) = (K \oplus K, \lambda \oplus (-\lambda)) \cong H^{\ell}$

 $(\because \lambda \oplus (-\lambda)$. Sign $= 0$, even

- $L_{4k}(\mathbb{Z}[1]) \cong \mathbb{Z}$ $(K, \lambda) \mapsto \mathrm{Sign}(K, \lambda)$ $//$

Def (σ の定義)

(f, b) : $\deg = 1$, normal に対し これに bordant な $\deg = 1$, normal

h-connected (f', b') を一つ取る $\longrightarrow (K_n(M), \lambda)$

$$\sigma(f, b) \underset{def}{\equiv} [(K_n(M), \lambda)] \in L_{4k}(\mathbb{Z}[1])$$

Prop. これは well-defined

$\sigma(f, b)$ は (f, b) の bordism class のみによる

$\left.\begin{matrix} m=4k=2n \\ \pi_1=1 \end{matrix}\right)$ のとき「$\sigma(f,b)=0 \Rightarrow K_n(M)$ の元が surgery で消せる」ことの証明

$(f,b): M^{2n} \longrightarrow X$ deg $=1$, normal, n-connected

Note
$$\left[\begin{array}{l} S^{n-1}\times D^{n+1} \subset M^{2n} \text{ s.t. } [S^{n-1}\times\{0\}]=0 \text{ in } \pi_{n-1}(M) \\ \quad \downarrow (n-1)\text{-surgery} \\ (f',b'): M' = M \# S^n\times S^n \to X \end{array}\right.$$

- $\sigma(f,b)=0 \Rightarrow (K_n(M),\lambda)\oplus H^{\ell} \cong H^{\ell'}$ $\exists \ell, \ell'$
- (f,b) に上のような surgery を ℓ 回やる

$\Rightarrow (f'',b''): M'' := M \#_\ell S^n\times S^n \to X$

s.t. $(K_n(M''),\lambda'') \cong H^{\ell'}$

- $H^{\ell'}$ の生成元 x を
$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "g"] \arrow[d] & M'' \arrow[d, "f''"] \\ D^{n+1} \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$
で表わすと

$g(S^n)$ の自己交叉は 0 $\Rightarrow$ 法束は自明 $\Rightarrow$ $\exists$ framing

$\Downarrow$

$\boxed{n\geq 3}$ Whitney trick $\rightarrow$ g は embedding に regular homotopic

$\Downarrow$

x は n-surgery で消せる

$\pi_1 \neq 1$ のとき

$L_{4k}(\pi)$ "$=$" $\{\pi\text{-equiv. form } \lambda: K\times K \to \mathbb{Z}[\pi]\}$ / hyperbolic

$\sigma(f,b)$ "$=$" $[(K_{2k}(M),\lambda)]$

正確には三つ組 (K,λ,μ) を考える

μ: 自己交叉で決まる quadratic form

以上で

$$S(X) \xrightarrow{\tau} N(X) \xrightarrow{\sigma} L_m(\mathbb{Z}[\pi])$$

$L_{m+1}(\mathbb{Z}[\pi]) \curvearrowright S(X) \xrightarrow{\tau} N(X)$

意味 $\tau[(M,f)] = \tau[(M',f')] \Rightarrow \exists x \in L_{m+1}(\mathbb{Z}[\pi])$

$$[(M',f')] = x \cdot [(M,f)]$$

Theorem

$\boxed{m \geq 5}$ $\forall x \in L_{m+1}(\mathbb{Z}[\pi])$ は次の normal map の rel ∂ surgery obstruction として実現される:

$$(F; 1, h) : (W; M, M') \to M \times (I; \{0\}, \{1\})$$

where $h : M' \to M$ はホモトピー同値

@ $(M', f') = x \cdot (M, f)$ を次で定義

- M' は上の M'
- $f' : M' \xrightarrow{h} M \xrightarrow{f} X$

[Freedman]

π_1 : good $\Rightarrow$ 4-dim Top で Surgery exact sequence が成り立つ.